

Experiment ET 05 – Circuits with complex impedances |  
Schaltungen mit komplexen Widerständen

## 1 Object of the experiment | Versuchsziel

Getting to know the frequency behavior of the linear basic network elements ohmic resistance, inductance and capacitance as single elements as well as their connection. Experimental investigation of the phenomenon of resonance and its characteristic quantities in series and parallel resonant circuits.

Kennen lernen des Frequenzverhaltens der linearen Grundschaltelemente ohmscher Widerstand, Induktivität und Kapazität als Einzelelemente sowie bei deren Zusammenschaltung. Experimentelle Untersuchung der Erscheinung der Resonanz und ihrer Kenngrößen beim Reihen- und Parallelschwingkreis.

## 2 Basics | Grundlagen

### 2.1 General Information | Allgemeines

The behavior of the (ideal) linear basic network elements ohmic resistance  $R$ , inductance  $L$  and capacitance  $C$  is characterized by the following correlations between the currents  $i(t)$  and voltages  $u(t)$  at the terminals, which are regarded as temporally variable:

Das Verhalten der (idealen) linearen Grundschaltelemente ohmscher Widerstand  $R$ , Induktivität  $L$  und Kapazität  $C$  wird durch die folgenden Zusammenhänge zwischen den als zeitlich veränderlich betrachteten Strömen  $i(t)$  und Spannungen  $u(t)$  an den Anschlussklemmen charakterisiert:

Ohmic resistance | OHMScher Widerstand:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad \text{bzw.} \quad i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t) = G \cdot u_R(t) \quad (1)$$

Inductance | Induktivität:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad \text{bzw.} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) \cdot dt \quad (2)$$

Capacitance | Kapazität:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) \cdot dt \quad \text{bzw.} \quad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad (3)$$

If one considers only circuits which are fed from sources with purely sinusoidal voltage and current characteristics, all currents and voltages of the circuit show a sinusoidal characteristic after a sufficiently long time. In this case, the calculation of the quantities of interest can be carried out with the help of the **symbolic method**.

The time functions  $u(t)$  and  $i(t)$  are assigned to the complex time functions  $\underline{u}(t)$  and  $\underline{i}(t)$  as well as the time-independent complex quantities  $\underline{U}$  and  $\underline{I}$ , which are called complex effective values of voltage and current and can be represented as pointers in the complex number plane.

For practical calculations, the intermediate step via the complex time functions can usually be omitted, i. e. the assignment  $u(t) \rightarrow \underline{U}$  and  $i(t) \rightarrow \underline{I}$  takes place immediately.

$$\begin{aligned} u(t) &= \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) = \sqrt{2} \cdot U \cos(\omega t + \varphi_u) \\ \rightarrow \underline{u}(t) &= \sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) = \sqrt{2} \cdot I \cos(\omega t + \varphi_i) \\ \rightarrow \underline{i}(t) &= \sqrt{2} \cdot I \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} \end{aligned} \quad (5)$$

If one inserts the complex time functions  $\underline{u}(t)$  and  $\underline{i}(t)$  after (4) and (5) into the current-voltage relations (1) ... (3), then one finds

$$\sqrt{2} \cdot U_R \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = R \cdot \sqrt{2} \cdot I_R \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R \quad (6)$$

for ohmic resistances.  
It applies to inductances:

$$\sqrt{2} \cdot U_L \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = j\omega L \cdot \sqrt{2} \cdot I_L \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L \quad (7)$$

and for capacitances:

$$\sqrt{2} \cdot U_C \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \sqrt{2} \cdot I_C \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}_C \quad (8)$$

It can be seen that  $\underline{U}$  and  $\underline{I}$  are connected at all three basic network elements by the same current-voltage relation

Betrachtet man ausschließlich Schaltungen, die aus Quellen mit rein sinusförmigem Spannungs- und Stromverlauf gespeist werden, so weisen nach hinreichend großer Zeit alle Ströme und Spannungen der der Schaltung einen sinusförmigen Verlauf auf. In diesem Fall kann die Berechnung der interessierenden Größen mit Hilfe der **symbolischen Methode** erfolgen.

Den Zeitfunktionen  $u(t)$  und  $i(t)$  werden die komplexen Zeitfunktionen  $\underline{u}(t)$  und  $\underline{i}(t)$  sowie letztlich die zeitunabhängigen komplexen Größen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  zugeordnet, die als komplexe Effektivwerte der Spannung und des Stromes bezeichnet werden und als Zeiger in der komplexen Zahlenebene dargestellt werden können. Für praktische Rechnungen kann der Zwischenschritt über die komplexen Zeitfunktionen meist entfallen, d. h. es erfolgt sofort die Zuordnung  $u(t) \rightarrow \underline{U}$  und  $i(t) \rightarrow \underline{I}$ .

Setzt man die komplexen Zeitfunktionen  $\underline{u}(t)$  und  $\underline{i}(t)$  nach (4) und (5) in die Strom-Spannungsbeziehungen (1) ... (3) ein, so findet man

für ohmsche Widerstände.  
Für Induktivitäten gilt:

und für Kapazitäten:

Man erkennt, dass  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  an allen drei Grundschaltelementen durch die gleiche Strom-Spannungs-Beziehung

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = Z \cdot e^{j\varphi_z} \cdot \underline{I} \quad \begin{array}{l} \text{with} \\ \text{mit} \end{array} \quad \left| \quad Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I} \quad (9)$$

$$\begin{array}{l} \text{and} \\ \text{und} \end{array} \quad \left| \quad \varphi_z = \varphi_u - \varphi_i = \varphi \quad \begin{array}{l} \varphi: \text{Phase shifting angle} \\ \text{Phasenverschiebungswinkel} \end{array}$$

Where the following applies: | verknüpft sind, wobei gilt:

$$\begin{array}{ll} \underline{Z} = R + j0 = R \cdot e^{j0} & \text{Ohmic resistance} \mid \text{ohmscher Widerstand} \\ \underline{Z} = 0 + j\omega L = \omega L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{Inductance} \mid \text{Induktivität} \\ \underline{Z} = 0 - j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{Capacitance} \mid \text{Kapazität.} \end{array} \quad (10)$$

Similar to the ohmic law for direct current, the complex RMS value of the voltage  $\underline{U}$  is proportional to that of the current  $\underline{I}$ . The proportionality factor is called resistance operator, complex resistance or impedance, its value  $|\underline{Z}| = Z$  as impedance.

Analog zum ohmschen Gesetz bei Gleichstrom ist der komplexe Effektivwert der Spannung  $\underline{U}$  dem des Stromes  $\underline{I}$  proportional. Der Proportionalitätsfaktor wird als Widerstandsoperator, komplexer Widerstand oder Impedanz bezeichnet, sein Betrag  $|\underline{Z}| = Z$  als Scheinwiderstand.

The real part of  $\underline{Z}$

Der Realteil von  $\underline{Z}$

$$\mathcal{Re}\{\underline{Z}\} = R \quad (11)$$

is called ohmic resistance, active resistance or resistance, the imaginary part is called

heißt ohmscher Widerstand, Wirkwiderstand oder Resistanz, der Imaginärteil

$$\mathcal{Im}\{\underline{Z}\} = X \quad (12)$$

reactance. Analog to the conductance  $G$  for direct current, the conductance operator is defined as follows

dagegen Blindwiderstand oder Reaktanz. Analog zum Leitwert  $G$  bei Gleichstrom definiert man den Leitwertoperator

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U} = Y \cdot e^{j\varphi_y} \quad (13)$$

$$\begin{array}{l} \text{with} \\ \text{mit} \end{array} \quad \left| \quad Y = |\underline{Y}| = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U} \quad \text{and} \quad \left| \quad \varphi_y = \varphi_i - \varphi_u = -\varphi_z$$

also known as complex conductance or admittance.

der auch als komplexer Leitwert oder Admittanz bezeichnet wird.

The magnitude of the complex conductance  $|\underline{Y}| = Y$  is called the apparent conductance. For the real part of  $\underline{Y}$

Der Betrag des komplexen Leitwertes  $|\underline{Y}| = Y$  heißt Scheinleitwert. Für den Realteil von  $\underline{Y}$

$$\mathcal{Re}\{\underline{Y}\} = G \quad (14)$$

the terms active conductance or conductance are commonly used, for the imaginary part

sind die Begriffe Wirkleitwert oder Konduktanz gebräuchlich, für den Imaginärteil

$$\mathcal{Im}\{\underline{Y}\} = B \quad (15)$$

on the other hand, reactive conductance or susceptance.

Considering the ideal basic network elements  $R$ ,  $L$  and  $C$ , the complex resistance  $\underline{Z}$  can be determined:

- With ohmic resistances,  $\underline{Z}$  is only real and frequency independent; there is no phase shift between voltage and current.
- For inductances,  $\underline{Z}$  is only imaginary; the phase shift between voltage and current is  $\varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$ . Both  $\underline{Z}$  and  $Z$  are frequency dependent (direct proportionality between  $Z$  and  $\omega$ ).
- For capacitances  $\underline{Z}$  is also only imaginary; the phase shift between voltage and current is  $\varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$ . Both  $\underline{Z}$  and  $Z$  are frequency-dependent (indirect proportionality between  $Z$  and  $\omega$ ).

dagegen Blindleitwert oder Suszeptanz.

Betrachtet man die idealen Grundschalt-elemente  $R$ ,  $L$  und  $C$ , so lässt sich bezüglich des komplexen Widerstandes  $\underline{Z}$  feststellen:

- Bei ohmschen Widerständen ist  $\underline{Z}$  rein reell und frequenzunabhängig; zwischen Spannung und Strom tritt keine Phasenverschiebung auf.
- Bei Induktivitäten ist  $\underline{Z}$  rein imaginär; die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt  $\varphi_u - \varphi_i = 90^\circ$ . Sowohl  $\underline{Z}$  als auch  $Z$  sind frequenzabhängig (direkte Proportionalität zwischen  $Z$  und  $\omega$ ).
- Bei Kapazitäten ist ebenfalls  $\underline{Z}$  rein imaginär; die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt hier jedoch  $\varphi_u - \varphi_i = -90^\circ$ . Sowohl  $\underline{Z}$  als auch  $Z$  sind frequenzabhängig (indirekte Proportionalität zwischen  $Z$  und  $\omega$ ).

## 2.2 Real network elements | Reale Schaltelemente

Each technical coil has losses (heating due to winding resistance, eddy current and hysteresis losses in the presence of an iron core).

This means that the impedance of a coil is not just a reactance. If one considers the coil losses caused by a resistor  $R_r$  (Figure 1a) in series with the inductor  $L$ , the impedance results as follows

$$\underline{Z} = R_r + j\omega L_r . \quad (16)$$

The definition and characterization of the losses is based on the so-called coil quality

$$g = \frac{\omega L_r}{R_r} \quad (17)$$

or the loss factor

$$\tan \delta_r = \frac{1}{g} = \frac{R_r}{\omega L_r} . \quad (18)$$

Jede Spule hat Verluste (Erwärmung infolge des Widerstandes der Wicklung, Wirbelstrom und Hystereseverluste bei Vorhandensein eines Eisenkerns). Dies bedeutet, dass der Scheinwiderstand einer Spule kein reiner Blindwiderstand ist. Denkt man sich die Spulenverluste verursacht durch einen in Reihe zur Induktivität  $L$  liegenden Widerstand  $R_r$  (Figure 1a), so ergibt sich der Scheinwiderstand

Definiert und zur Charakterisierung der Verluste benutzt wird die so genannte Spulengüte

oder der Verlustfaktor

But also another equivalent circuit, represented by one resistor parallel to inductor, is conceivable (Figure 1b).

Here the calculation for small losses

$$L_r = L_p = L \quad \text{und} \quad R_p = \frac{(\omega L_r)^2}{R_r} \quad (19)$$

or (using the definition of coil quality) results to

$$R_p = g^2 R_r \quad (20)$$

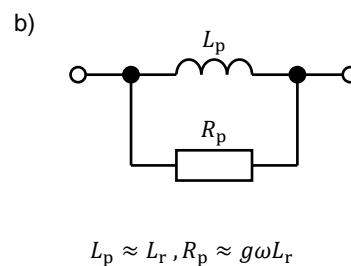
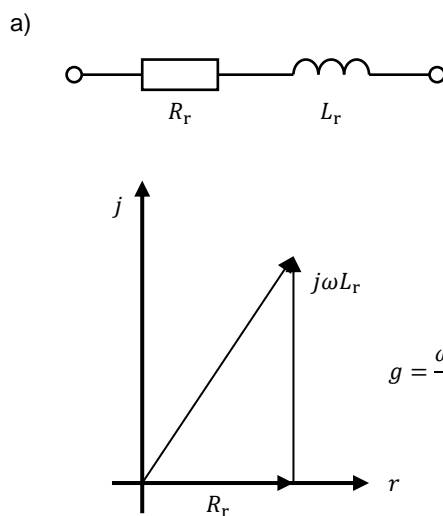


Figure 1: Equivalent circuit diagrams of the lossy inductance | Ersatzschaltbilder der verlustbehafteten Induktivität

Technical capacitors are also not completely loss-free, even if they are closer to the ideal case than is the case with coils.

The losses of the capacitor are caused by a certain, though minimal, conductivity of the dielectric as well as by re-polarization and conversion losses of the molecule dipoles. The equivalent electrical circuit diagram of a lossy capacitor in the form of a parallel circuit is shown in Figure 2a. The losses are usually characterized by a loss angle, which is defined as follows:

$$\tan \delta_c = \frac{1}{R_c \cdot \omega C_p} \cdot \quad (21)$$

Auch technische Kondensatoren sind nicht vollkommen verlustfrei, selbst wenn sie sich dem Idealfall mehr nähern, als dies bei Spulen der Fall ist.

Die Verluste des Kondensators haben ihre Ursache in einer gewissen, wenn auch minimalen Leitfähigkeit des Dielektrikums sowie in Umpolarisierungs- und Umrichtungsverlusten der Moleküldipole. Das elektrische Ersatzschaltbild eines verlustbehafteten Kondensators in Form einer Parallelschaltung zeigt Figure 2a. Die Verluste werden üblicherweise durch einen Verlustwinkel charakterisiert, der wie folgt definiert wird:

Of course, a series equivalent circuit can also be specified for the capacitor (Figure 2b), whereby the following conversion applies:

Selbstverständlich lässt sich auch beim Kondensator eine Reihenersatzschaltung angeben (Figure 2b), wobei folgende Umrechnung gilt:

$$C_p \approx C_r = C \quad \text{and} \quad \left| \quad R_r \approx \frac{\left(\frac{1}{\omega C_p}\right)^2}{R_p} = \tan^2 \delta_c \cdot R_p \right. \quad (22)$$

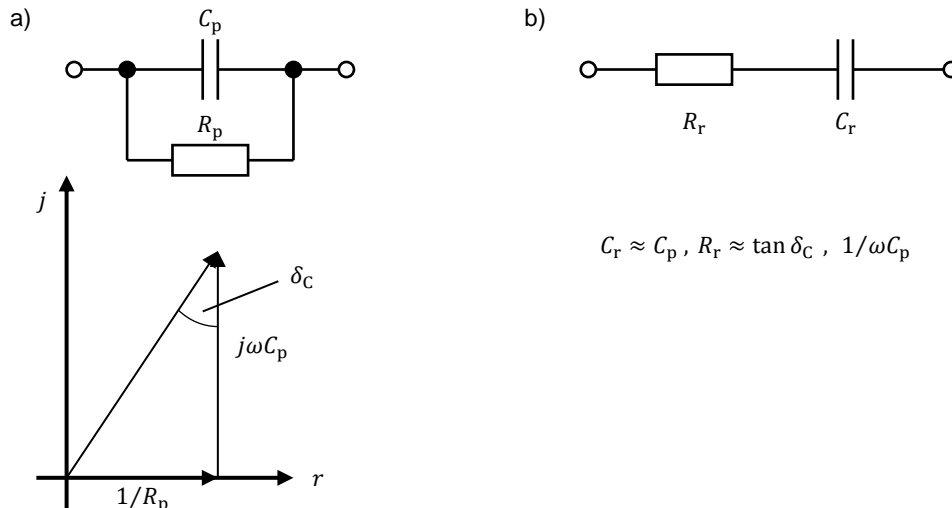


Figure 2: Equivalent circuit diagrams of the lossy capacitance | Ersatzschaltbild der verlustbehafteten Kapazität

### 2.3 Connection of basic circuit elements | Zusammenschaltung von Grundschaltelementen

If the basic network elements  $R$ ,  $L$  and  $C$  as well as voltage and current sources are connected to form electrical networks, the symbolic method can be used to calculate these circuits completely analogously to the calculation of direct current networks, i. e. all calculation methods commonly used there can still be used. Special features result on the one hand from the frequency dependence of the complex resistance and on the other hand from the fact that reactive resistances can have both positive and negative values.

As a result, the reactive resistances of two-pole circuits consisting of  $R$ ,  $L$  and  $C$  cancel each other out for certain frequencies under certain conditions. On the basis of the two elementary circuits **series and parallel resonant circuit**, this effect, which is called resonance, shall be examined in more detail. A vibrating system always contains two different energy storage devices.

Werden die Grundschaltelemente sowie Spannungs- und Stromquellen zu elektrischen Netzwerken zusammenschaltet, so kann die Berechnung dieser Schaltungen mit Hilfe der symbolischen Methode vollkommen analog zur Berechnung von Gleichstrom-Netzwerken erfolgen, d. h. alle dort üblichen Berechnungsmethoden sind weiter anwendbar. Besonderheiten ergeben sich zum einen aus der Frequenzabhängigkeit der komplexen Widerstände und zum anderen daraus, dass Blindwiderstände sowohl positive als auch negative Werte haben können. Dies hat zur Folge, dass sich die Blindwiderstände von aus  $R$ ,  $L$  und  $C$  aufgebauten Zweipol-Schaltungen unter gewissen Voraussetzungen für bestimmte Frequenzen gegenseitig aufheben. Anhand der beiden elementaren Schaltungen **Reihen- und Parallelschwingkreis** soll dieser als Resonanz bezeichnete Effekt näher untersucht werden. Ein schwingungsfähiges System enthält stets zwei verschiedene Energiespeicher.

## 2.4 Series resonant circuit | Reihenschwingkreis

### 2.4.1 Resistance curve | Widerstandsverlauf

Figure 3 shows the circuit of the series resonant circuit. For its apparent resistance the following results depending on the angular frequency are obtained

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

resp. |  
bzw.  $\underline{Z} = Z(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

(23)

with |  
mit  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  and |  
und  $\varphi = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

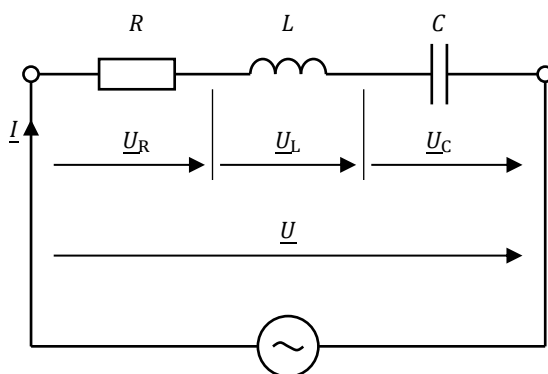


Figure 3: Electrical series resonant circuit | Elektrischer Reihenschwingkreis

The characteristic curve of the impedance and the phase angle as well as the Nyquist plot are shown graphically in Figure 4. This shows that the resistance has its minimum value reached at resonant frequency. For this frequency the inductive and capacitive reactance are cancelling each other. For the resonant frequency it follows

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \text{resp. |} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{bzw.}$$

Der Verlauf des Scheinwiderstandes und des Phasenwinkels sowie die Ortskurve sind in Figure 4 grafisch dargestellt. Dabei zeigt sich, dass der Widerstand seinen Minimalwert bei der Resonanzfrequenz erreicht. Für diese Frequenz heben sich induktiver und kapazitiver Blindwiderstand gegenseitig auf. Für die Resonanzfrequenz folgt daraus

$$\text{or |} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad \text{oder} \quad (24)$$

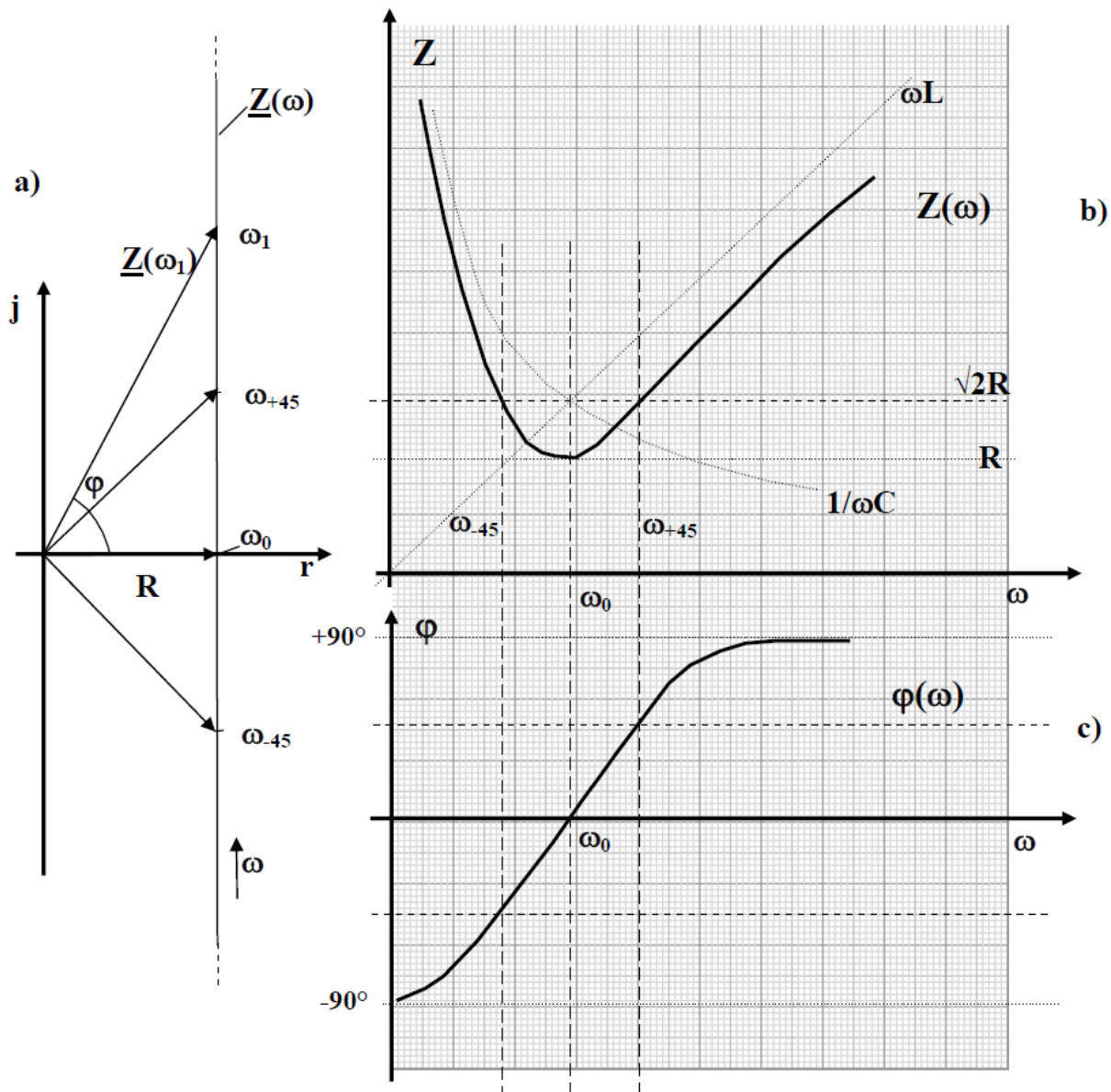


Figure 4: Nyquist plot (a), magnitude of impedance (b) and phase shift between current and voltage (c) of the series resonant circuit | Ortskurve (a), Betrag des Scheinwiderstandes (b) und Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung (c) des Reihenschwingkreises

## 2.4.2 Current consumption | Stromaufnahme

Assuming that the internal resistance of the generator is low, the voltage  $U$  at the resonant circuit is constant and it follows for the current

Unter der Voraussetzung eines niedrigen Innenwiderstandes des Generators ist die Spannung  $U$  am Schwingkreis konstant und für den Strom folgt

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad \text{resp. |} \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (25)$$

bzw.

At the resonant frequency ( $\omega = \omega_0$ ) this current reaches its maximum:  $I_0 = \frac{U}{R}$ .

Bei der Resonanzfrequenz ( $\omega = \omega_0$ ) erreicht dieser Strom sein Maximum:  $I_0 = \frac{U}{R}$ .



### 2.4.3 Voltage curve at $C$ , $L$ and $R$ | Spannungsverlauf an $C$ , $L$ und $R$

The partial voltages at the network elements are defined by the following equations

Die Teilspannungen an den Schaltelementen sind durch folgende Beziehungen festgelegt.

$$U_R = R \cdot I(\omega), U_L = \omega L \cdot I(\omega) \quad \text{and} \quad U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I(\omega) \quad (26)$$

In the case of resonance

Im Resonanzfall wird

$$U_{L0} = U_{C0} = \rho \cdot U \quad \begin{array}{l} \text{with} \\ \text{mit} \end{array} \quad \rho = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \rho\text{-Güte (also | auch } Q), \quad (27)$$

i. e., at resonance, the partial voltages at  $L$  and  $C$  are amplified by the factor  $\rho$  with reference to the constant terminal voltage, therefore  $\rho$  is also called resonance magnification or resonance rise.

d. h., bei Resonanz sind die Teilspannungen an  $L$  und  $C$  gegenüber der konstanten Klemmenspannung  $\rho$ -mal überhöht, deshalb wird  $\rho$  auch als Resonanzüberhöhung bezeichnet.

As a result of the ohmic resistance, these resonance voltages at the reactive network elements are not the highest voltages occurring at  $L$  and  $C$ . The absolute maximum for  $U_L$  resp.  $U_C$  occurs at

Als Folge des ohmschen Widerstandes sind diese Resonanzspannungen an den Blindschaltelementen nicht die größten an  $L$  und  $C$  auftretenden Spannungen. Das absolute Maximum für  $U_L$  bzw.  $U_C$  liegt bei

$$\omega_{L,\max} = \omega_0 \left[ 1 + \left( \frac{1}{2\rho} \right)^2 \right] \quad \text{bzw.} \quad \omega_{C,\max} = \omega_0 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2\rho} \right)^2 \right] \quad (28)$$

These deviations from  $\omega_0$  are usually very small and amount to only 1 % even at a low resonance rise of  $\rho = 5$  (Figure 5).

Diese Abweichungen von  $\omega_0$  sind gewöhnlich sehr klein und betragen selbst bei einer niedrigen Resonanzüberhöhung von  $\rho = 5$  nur 1 % (Figure 5).

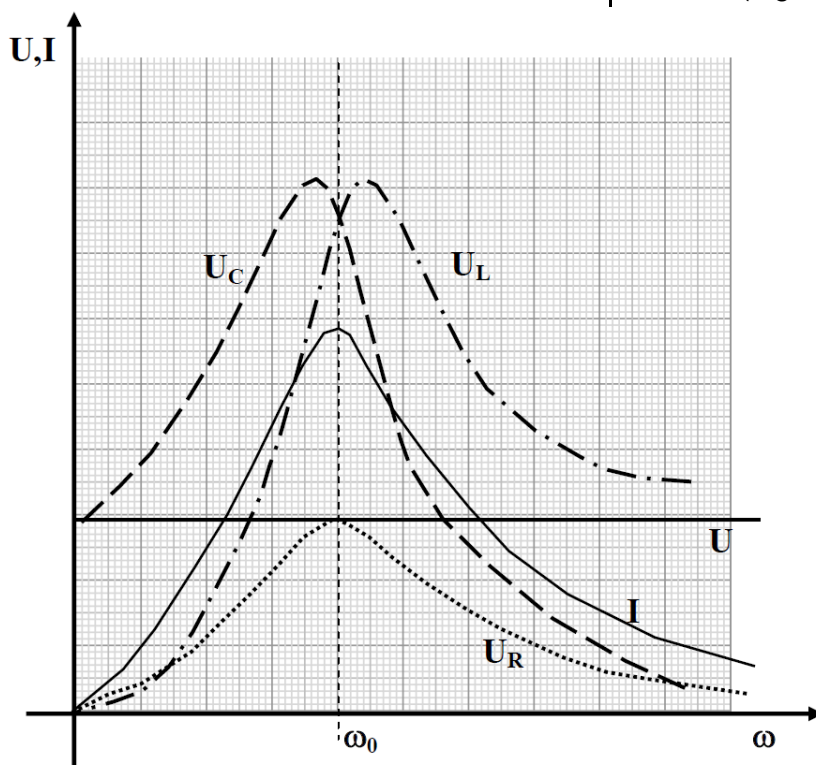


Figure 5: Voltages and currents at a series resonant circuit | Spannungen und Strom beim Reihenschwingkreis

### 2.4.4 Bandwidth | Bandbreite

If the ratio of the resonant circuit current to its respective maximum value (at resonance) is formed, it is obtained (see point 2.4.2):

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (29)$$

Figure 6 shows this dependency for different resonance magnifications. It can be clearly seen that the resonance characteristics of a circuit are more pronounced in their appearance with growing  $\rho$ .

Bildet man das Verhältnis des Stromes des Schwingkreises zu seinem jeweiligen Maximalwert (bei Resonanz), ergibt sich (siehe Absatz 2.4.2):

Figure 6 zeigt diese Abhängigkeit für unterschiedliche Resonanzüberhöhungen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Resonanzeigenschaften eines Kreises mit wachsendem  $\rho$  ausgeprägter in Erscheinung treten.

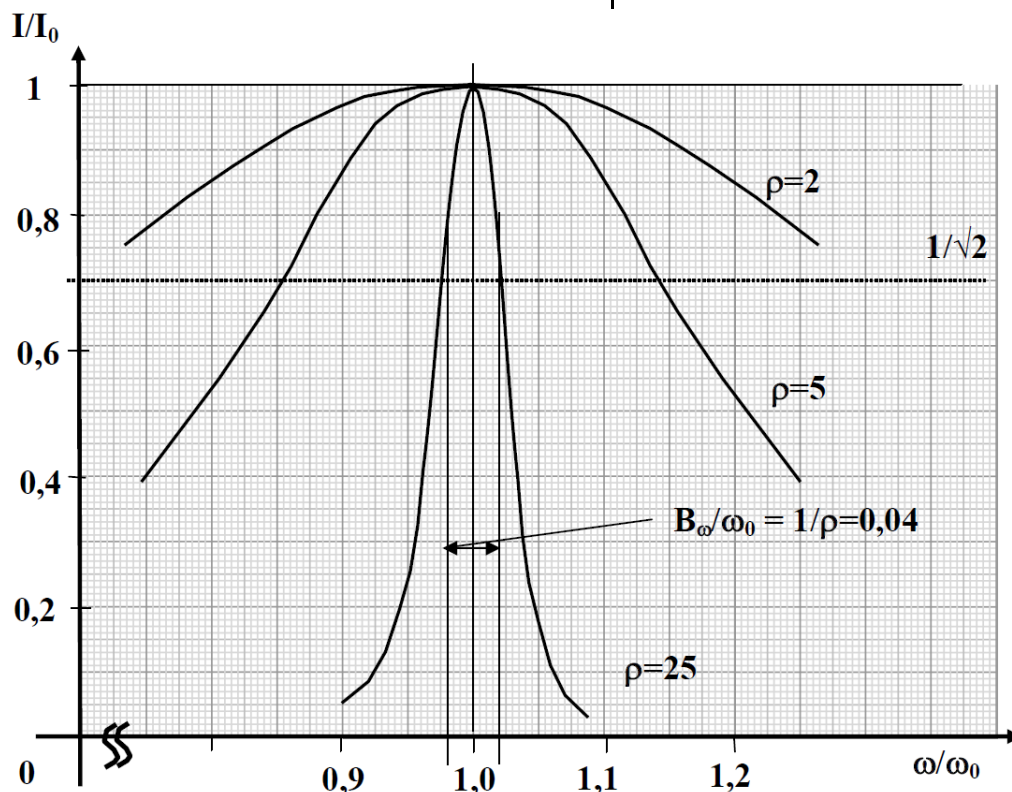


Figure 6: Resonance curve  $I/I_0$  of series resonant circuits at different resonance magnification | Resonanzkurven  $I/I_0$  für Reihenschwingkreise unterschiedlicher Resonanzüberhöhung

Similar to the characterization of the transmission characteristics of amplifiers, transformers, etc., the frequencies at which the resonance curve drops to the  $1/\sqrt{2}$ -th part of its maximum value are defined as the upper or lower cutoff frequency ( $f_{+45}$ ;  $f_{-45}$ ).

The frequency range in between is called bandwidth  $B$  (also  $\Delta f$ ) of the resonant circuit:

Ähnlich wie zur Kennzeichnung der Übertragungseigenschaften von Verstärkern, Übertragern usw. werden die Frequenzen, bei denen die Resonanzkurve auf den  $1/\sqrt{2}$ -ten Teil ihres Maximalwertes absinkt, als obere bzw. untere Grenzfrequenz ( $f_{+45}$ ;  $f_{-45}$ ) definiert. Der dazwischen liegende Frequenzbereich wird als Bandbreite  $B$  (auch  $\Delta f$ ) des Schwingkreises bezeichnet:

$$B_{\omega} = \omega_{+45} - \omega_{-45} = \frac{\omega_0}{\rho}, \quad B_f = f_{+45} - f_{-45} = \frac{f_0}{\rho} \quad (30)$$

The bandwidth is thus inversely proportional to the resonance magnification (quality). The frequency band is almost symmetrical to the resonance frequency. The index  $\pm 45$  results from the fact that at these frequencies the phase angle between resonant circuit voltage and current is  $+45^\circ$  and  $-45^\circ$ , respectively, with the active and reactive components of the resonant circuit resistance being equal in magnitude (see also Figure 4):

$$\omega_{\pm 45} L - \frac{1}{\omega_{\pm 45} C} = \pm R \quad \text{bzw.} \quad Z_{\pm 45} = \sqrt{2} \cdot Z_0 = \sqrt{2} \cdot R. \quad (31)$$

## 2.5 Parallel resonant circuit | Parallelschwingkreis

The lossy, high-impedance fed parallel resonant circuit is shown in Figure 7a. The circuit is simplified as shown in Figure 7b in order to create clear relationships with regard to such quantities as voltage and conductance characteristics as well as resonance properties. The conversion is done in the way described under point 2.2.

Die Bandbreite ist also der Resonanzüberhöhung (Güte) umgekehrt proportional. Das Frequenzband liegt nahezu symmetrisch zur Resonanzfrequenz. Der Index  $\pm 45$  resultiert daraus, dass bei diesen Frequenzen der Phasenwinkel zwischen Schwingkreisspannung und -strom  $+45^\circ$  bzw.  $-45^\circ$  beträgt, wobei Wirk- und Blindkomponente des Schwingkreiswiderstandes betragsmäßig gleich groß sind (siehe auch Figure 4):

Der verlustbehaftete, hochohmig gespeiste Parallelschwingkreis ist in Figure 7a) dargestellt. Um übersichtliche Verhältnisse hinsichtlich solcher Größen wie Spannungs- und Leitwertverlauf sowie Resonanzeigenschaften zu schaffen, wird die Schaltung so vereinfacht, wie es in Figure 7b) dargestellt ist. Die Umrechnung erfolgt in der unter Absatz 2.2 beschriebenen Art und Weise.

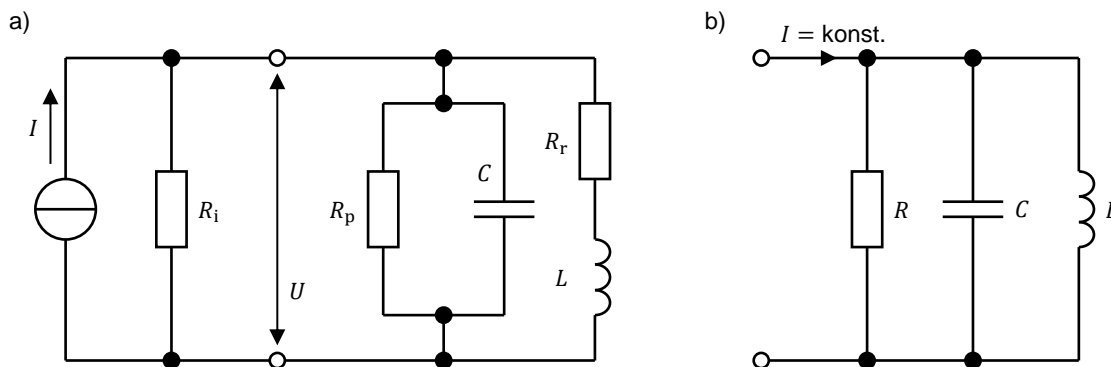


Figure 7: Lossy parallel resonant circuit | Verlustbehafteter Parallelschwingkreis

This circuit provides dual results for the series resonant circuit. Only resistance to conductance and current to voltage are interchanged. (Individual derivations are not used here. Within the scope of the preparatory tasks, these are to be worked out by yourself).

Diese Schaltung liefert zum Reihenschwingkreis duale Ergebnisse. Es vertauschen sich lediglich Widerstand gegen Leitwert und Strom- gegen Spannungsverhältnisse. (Auf einzelne Ableitungen wird hier verzichtet. Diese sollen im Rahmen der Vorbereitungsaufgabe selbst erarbeitet werden).

### 3 Preparation of experiment | Versuchsvorbereitung

#### 3.1

For the parallel resonant circuit, derive conductance, resonant circuit voltage and currents as a function of  $\omega$  as well as the parameters  $\rho$  and  $B$ !

Leiten Sie für den Parallelschwingkreis Leitwert, Schwingkreisspannung und -ströme als Funktion von  $\omega$  sowie die Kenngrößen  $\rho$  und  $B$  ab!

#### 3.2

Calculate for the given resonant circuit the following values:

- Resonant frequency  $f_0$
- Resonance magnification  $\rho$
- Cutoff frequency  $f_{\pm 45}$
- Bandwidth  $B_f$

For the given values:

- $R_r = 30 \Omega$
- $C_r = 1 \mu\text{F}$
- $L_r = 20 \text{ mH}$
- $\tan \delta_C = 10^{-3}$  (at 1 kHz).

Berechnen Sie für den gegebenen Schwingkreis die folgenden Größen:

- Resonanzfrequenz  $f_0$
- Resonanzüberhöhung  $\rho$
- Grenzfrequenzen  $f_{\pm 45}$
- Bandbreite  $B_f$

mit den Werten:

- $R_r = 30 \Omega$
- $C_r = 1 \mu\text{F}$
- $L_r = 20 \text{ mH}$
- $\tan \delta_C = 10^{-3}$  (bei 1 kHz).

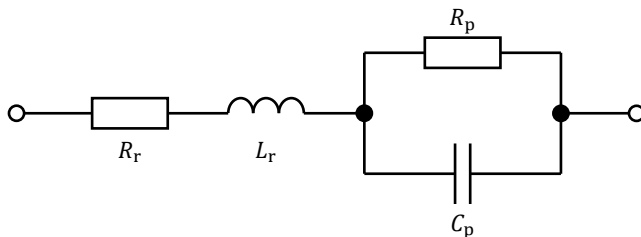


Figure 8: Series resonant circuit | Reihenschwingkreis

## 4 Experimental procedure | Versuchsdurchführung

### 4.1

By means of circuit 1, measure the current characteristics of the given ohmic resistors, inductors and capacitors as a function of the frequency at a **constant voltage** of the generator!

Calculate the resistance curves and display them graphically!

Messen Sie nach Schaltung 1 die Stromverläufe der vorliegenden ohmschen Widerstände, Spulen und Kondensatoren in Abhängigkeit von der Frequenz bei **konstanter Spannung** des Generators!

Berechnen Sie daraus die Widerstandsverläufe und stellen Sie diese grafisch dar!

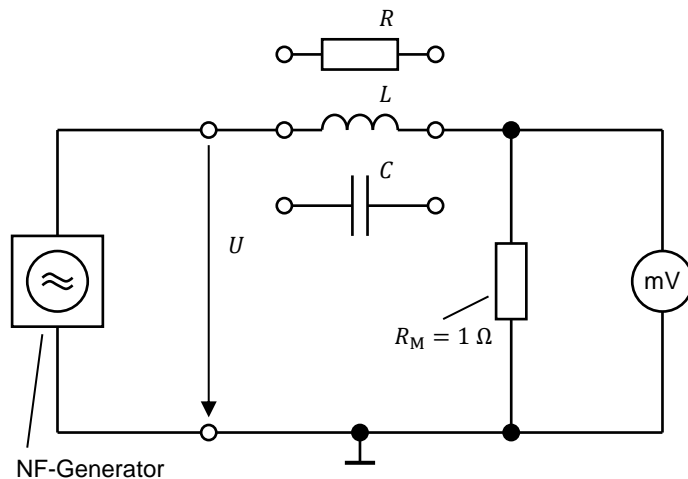


Figure 9: Circuit 1 | Schaltung 1

$$R_1 = 100 \, \Omega \quad R_2 = 200 \, \Omega$$

$$L_1 = 20 \, \text{mH} \quad L_2 = 40 \, \text{mH}$$

$$C_1 = 1,0 \, \mu\text{F} \quad C_2 = 2,0 \, \mu\text{F}$$

$$U_{\text{Gen}} = 2 \, \text{V},$$

$$f = (0,2 \dots 2,0) \, \text{kHz}$$

### 4.2

Determine the impedance curves according to the measurement procedure of 4.1

- for the series connection and
- for the parallel connection

of  $L_2 = 40 \, \text{mH}$  and  $R_1 = 1000 \, \Omega$  depending on the frequency and display them graphically!

Bestimmen Sie nach dem Messverfahren von 4.1 die Widerstandsverläufe

- der Reihenschaltung und
- der Parallelschaltung

von  $L_2 = 40 \, \text{mH}$  und  $R_1 = 100 \, \Omega$  in Abhängigkeit von der Frequenz und stellen Sie diese grafisch dar!

### 4.3

Interconnect  $L_1 = 20 \, \text{mH}$  and  $C_1 = 1 \, \mu\text{F}$  to a series resonant circuit and measure at **constant voltage**  $U$  of the generator

Schalten Sie  $L_1 = 20 \, \text{mH}$  und  $C_1 = 1 \, \mu\text{F}$  zu einem Reihenschwingkreis und messen Sie bei **konstanter Spannung**  $U$  des Generators

$$\frac{I}{I_{\text{max}}} = f(f), \quad \frac{U_L}{U_{L,\text{max}}} = f(f) \quad \text{and} \quad \text{und}$$

$$\frac{U_C}{U_{C,\text{max}}} = f(f).$$

#### Hints:

The measurement of  $I(f)/I_{\text{max}}$  is carried out by means of circuit 2. For the measurement of  $U_L(f)/U_{L,\text{max}}$  and  $U_C(f)/U_{C,\text{max}}$  circuit 3 is used, provided that  $L_1$  and  $C_1$  are swapped in the circuit.

#### Hinweise:

Die Messung von  $I(f)/I_{\text{max}}$  erfolgt unter Verwendung von Schaltung 2. Die Messungen  $U_L(f)/U_{L,\text{max}}$  und  $U_C(f)/U_{C,\text{max}}$  erfolgen nach Schaltung 3, wobei  $L_1$  und  $C_1$  in der Schaltung getauscht werden.

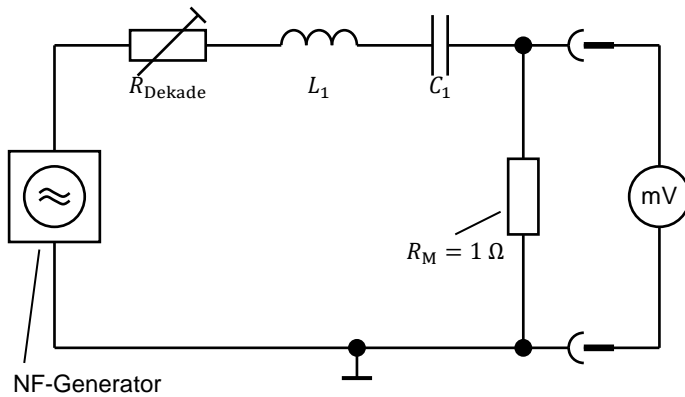


Figure 10: Circuit 2 | Schaltung 2

$$U_{\text{Gen}} = 2 \text{ V},$$

$$f = (0,2 \dots 2,0) \text{ kHz}$$

Messungen:

- $I(f)/I_{\text{max}}$  für  $R_{\text{Dekade}} = 0$  und  $R_{\text{Dekade}} = 18 \Omega$  (Aufgabe 4.4)

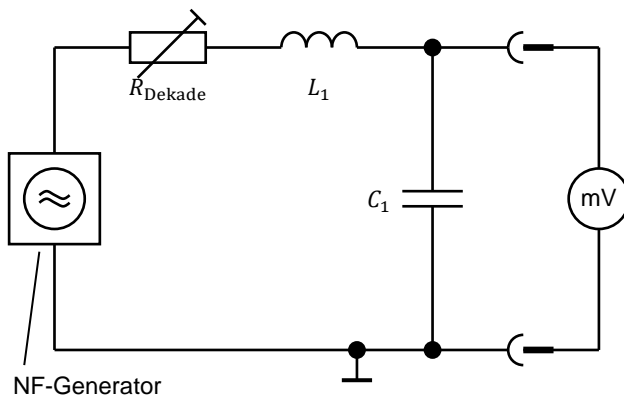


Figure 11: Circuit 3 | Schaltung 3

$$U_{\text{Gen}} = 2 \text{ V},$$

$$f = (0,2 \dots 2,0) \text{ kHz}$$

Messungen:

- $U_L(f)/U_{L,\text{max}}$  für  $R_{\text{Dekade}} = 0$ ;
- $U_C(f)/U_{C,\text{max}}$  für  $R_{\text{Dekade}} = 0$ ;
- $U_C(f)/U_{\text{Gen}}$  für  $R_{\text{Dekade}} = 0$  und  $R_{\text{Dekade}} = 18 \Omega$  (Aufgabe 4.5)

#### 4.4

Connect an additional damping resistor  $R_D = 18 \Omega$  in series with the resonant circuit and measure again  $\frac{I}{I_{\text{max}}} = f(f)$  by means of circuit 2.

Take the bandwidths and determine the resonance magnification  $\rho$  from the recorded curves from 4.3 ( $R_D = 0 \Omega$ ) and 4.4!

Schalten Sie einen zusätzlichen Dämpfungswiderstand  $R_D = 18 \Omega$  mit dem Schwingkreis in Reihe und messen Sie gemäß Schaltung 2 erneut  $\frac{I}{I_{\text{max}}} = f(f)$ .

Entnehmen Sie den aufgenommenen Kurvenverläufen aus 4.3 ( $R_D = 0 \Omega$ ) und 4.4 die Bandbreiten und bestimmen Sie daraus  $\rho$ !

#### 4.5

Measure the ratio  $\frac{U_C}{U} = f(f)$  for the above-mentioned series resonant circuit (circuit 3) with and without damping resistor ( $R_D = 18 \Omega$ ,  $R_D = 0 \Omega$ )!

Determine the resonance magnification  $\rho$  from the recorded curves. Compare the results with those from task 4.4!

Use  $\rho$  to determine the coil loss resistance for  $f_0$  (neglect capacitor losses)!

Messen Sie für den o.g. Reihenschwingkreis (Schaltung 3) mit und ohne Dämpfungswiderstand ( $R_D = 18 \Omega$ ,  $R_D = 0 \Omega$ ) das Verhältnis  $\frac{U_C}{U} = f(f)$ !

Bestimmen Sie aus den aufgenommenen Kurvenverläufen die Resonanzüberhöhungen  $\rho$ . Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 4.4!

Ermitteln Sie mit Hilfe von  $\rho$  den Verlustwiderstand der Spule für  $f_0$  (Verluste des Kondensators vernachlässigen)!

## 4.6

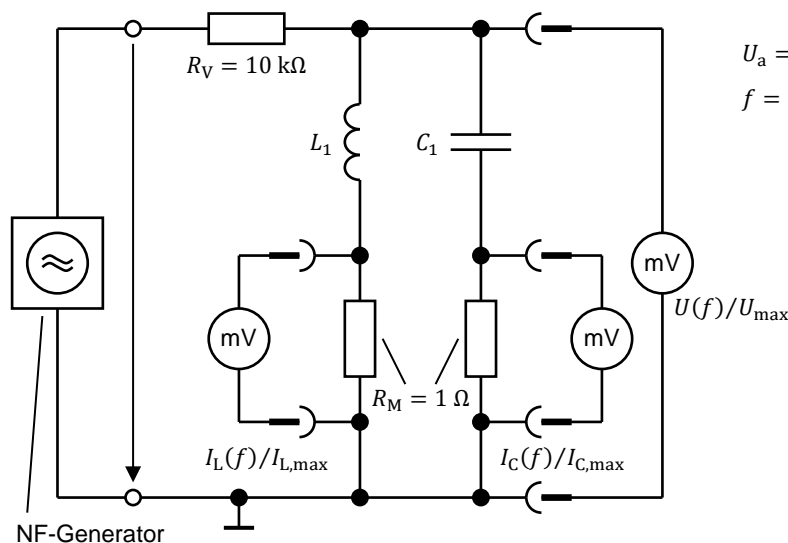
Connect  $L_1 = 20 \text{ mH}$  and  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  in parallel and measure at **constant total current** by means of circuit 4:

Schalten Sie  $L_1 = 20 \text{ mH}$  und  $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  parallel und messen Sie nach Schaltung 4 bei **konstantem Gesamtstrom**:

$$\frac{U}{U_{\max}} = f(f), \quad \frac{I_L}{I_{L,\max}} = f(f) \quad \text{and} \quad \frac{I_C}{I_{C,\max}} = f(f).$$

Determine the quality factor  $\rho$  of the parallel resonant circuit from the bandwidth and calculate the effective resonance impedance!

Bestimmen Sie für den Parallelschwingkreis die Güte  $\rho$  aus der Bandbreite und berechnen Sie daraus den wirksamen Resonanzwiderstand!



$$U_a = U_{\max} \text{ am } 10 \text{ W-Ausgang!}$$

$$f = (0,2 \dots 2,0) \text{ kHz}$$

Figure 12: Circuit 4 | Schaltung 4

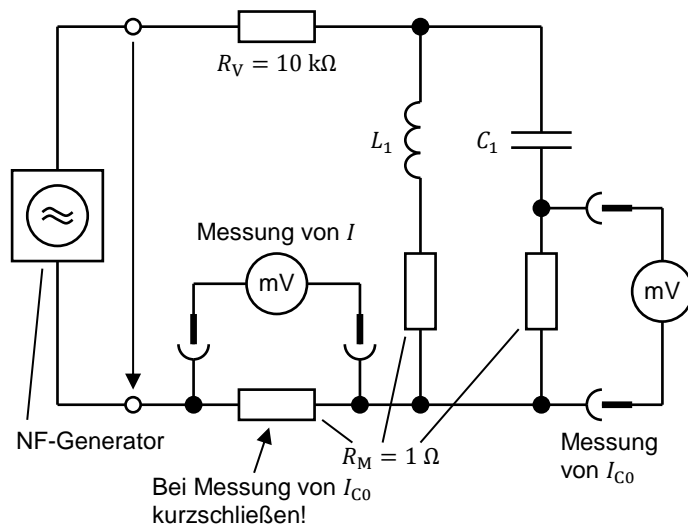
## 4.7

Use the parallel resonant circuit (circuit 5) at resonance ( $f = f_0$ ) to measure the total current and the current through the capacitor and determine the quality factor  $\rho$ !

Messen Sie am Parallelschwingkreis (Schaltung 5) bei Resonanz ( $f = f_0$ ) den Gesamtstrom und den Strom durch den Kondensator und bestimmen Sie daraus die Güte  $\rho$ !

Compare the result with that of 4.6!

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von 4.6!



$$U_a = U_{\max} \text{ am 10 W-Ausgang!}$$

$$f = f_0$$

Figure 13: Circuit 5 | Schaltung 5

#### 4.8

Determine the effective resonance impedance of the parallel circuit from task 4.6 using an additional resistor (cf. circuit 6)!

Compare the measured value with the value obtained from 4.6 for the resonance impedance!

##### Measuring method:

A calibrated ohmic resistor is connected in parallel to the resonant circuit elements and varied so that the resonance voltage drops to half of the original value.

In this case, the resulting damping resistance of the parallel resonant circuit is equal to the chosen additional resistance.

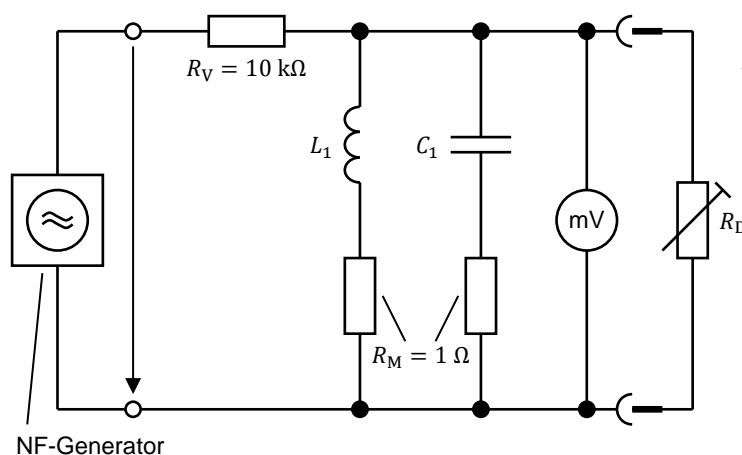
Bestimmen Sie den wirksamen Resonanzwiderstand des Parallelkreises aus Aufgabe 4.6 mit Hilfe eines Zusatzwiderstandes gemäß Schaltung 6!

Vergleichen Sie den Messwert mit dem aus 4.6 gewonnenen Wert für den Resonanzwiderstand!

##### Messmethode:

Ein geeichter ohmscher Widerstand wird den Schwingkreiselementen parallelgeschaltet und so verändert, dass die Resonanzspannung auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes absinkt.

Dann ist der wirksame Dämpfungswiderstand des Parallelkreises gleich dem eingestellten Zusatzwiderstand.



$$f = f_0$$

$U_a$  so einstellen, dass ein glatter Wert angezeigt wird (z.B. Vollausschlag)!

- I)  $U(f = f_0)$  bei  $R_D \rightarrow \infty$  messen;
- II)  $R_D$  so einregeln, dass  $U/2$  angezeigt wird.

Figure 14: Circuit 6 | Schaltung 6



## 5 Literature | Literatur

- [1] S. Altmann, D. Schlayer, Lehr- und Übungsbuch Elektrotechnik, Fachbuchverlag Leipzig - Köln, 1995.
- [2] W.-E. Büttner, Grundlagen der Elektrotechnik 1, Oldenbourg Verlag München - Wien, 2004.
- [3] T. Harriehausen, D. Schwarzenau, Moeller Grundlagen der Elektrotechnik, Springer Vieweg – Wiesbaden, 2013.

## 6 Attachment | Anhang

### 6.1 Equipment list | Geräteliste

1	Power frequency generator PHYWE	1	Leistungsfrequenzgenerator PHYWE
1	LF-Millivolt meter Peak Tech 5300 MVM	1	NF-Millivoltmeter Peak Tech 5300 MVM
1	Resistor decade MA 2115	1	Widerstandsdekade MA 2115
1	Pre-assembled circuit with $R$ , $L$ , $C$	1	vorgefertigte Schaltung mit $R$ , $L$ , $C$