

Praktikum Elektrotechnik
 Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik

Versuch Magnetischer Kreis

1. Versuchsziel

Kennenlernen von Kenngrößen und Gesetzmäßigkeiten magnetischer Kreise bei Erregung mit Wechselstrom.

2. Grundlagen

2.1. Magnetische Feldgrößen

Grundgesetz: Ein elektrischer Strom ist von einem Magnetfeld im Rechtsschraubensinn umgeben.

Ein elektrischer Strom ist dabei entweder ein Konvektionsstrom im Leiter (Bewegung von Ladungsträgern), ein Verschiebungsstrom im Nichtleiter (zeitliche Änderung des elektrischen Feldes), oder ein Strom im subatomaren Bereich (Elektronenbahnen, Spin).

Ein Magnetfeld erkennt man an seinen Wirkungen, das sind zum einen Kraftwirkungen auf stromdurchflossene Leiter, Dauermagnete oder ferromagnetische Körper (Fe, Co, Ni, ...) und zum anderen an seiner Induktionswirkung (Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld ist von einem elektrischen Feld umgeben).

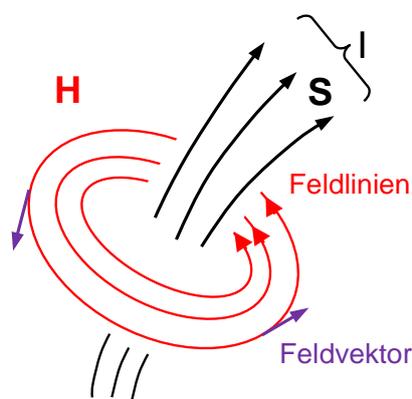


Bild 1: Magnetische Feldlinien umgeben Ströme

Dargestellt wird ein Magnetfeld (Vektorfeld) durch geschlossene Feldlinien, die den Strom, bzw. die Ströme, im Sinne einer Rechtsschraube („Rechte-Hand-Regel“) umgeben. Die Feldvektoren an jedem Punkt r sind Tangentialvektoren an diese Feldlinien. Die durch Feldlinien oder Feldvektoren dargestellten magnetischen Größen sind:

- Die magnetische Feldstärke: \mathbf{H} $[\mathbf{H}] = \text{A/m}$,

- Die magnetische Flussdichte: \mathbf{B} $[\mathbf{B}] = \text{Vs/m}^2 = 1\text{T}$
(Tesla)

Zahlenbeispiele:

- Erdmagnetfeld (Europa): $H \approx 38 \text{ A/m}$, $B \approx 48 \mu\text{T}$
- Leiter, 100 A, 10 cm Abstand: $H \approx 160 \text{ A/m}$, $B \approx 200 \mu\text{T}$
- Luftspalt in elektr. Maschinen: $H \approx 10^6 \text{ A/m}$, $B \approx 1 \text{ T}$

Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} und dem sie hervorrufenden Strom I wird durch das Durchflutungsgesetz beschrieben. Wenn man sich dabei auf Ströme in Leitern beschränkt, gilt die folgende Gleichung.

$$\oint_{(W)} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n I_k \quad (1)$$

Dabei bedeuten:

- (W) : Geschlossener Integrationsweg
- $\mathbf{H}(\mathbf{r})$: Magnetfeld am Ortspunkt \mathbf{r}
- $d\mathbf{r}$: Kleines Wegelement entlang des Weges (W)
- $\sum_{k=1}^n I_k$: Vorzeichenbehaftete Summe der vom Weg (W) umfassten Ströme. Positives Vorzeichen wenn Wegrichtung und Stromrichtung einer Rechtsschraube gehorchen, sonst negativ.

Aus dem Durchflutungsgesetz kann man nur für einfache Sonderfälle die Magnetfeldstärke \mathbf{H} berechnen. Einer dieser Sonderfälle ist der unendlich lange gerade Leiter.

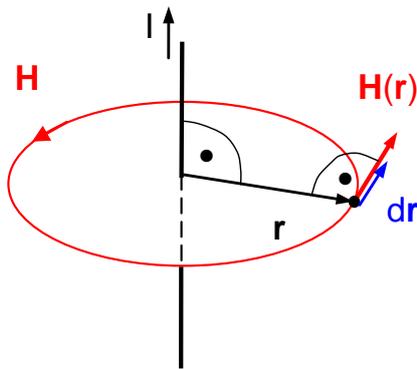


Bild 2: Feldlinien von \mathbf{H} um einen unendlich langen geraden Leiter

Legt man den Integrationsweg (W) als konzentrischen Kreis entlang einer Feldlinie von \mathbf{H} , so kann Gleichung (1) als skalares Integral geschrieben werden:

$$\oint_{(W)} H dr = I \quad (2)$$

Damit folgt

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

H hängt auf dem Weg (W) nur vom Abstand r zum Leiter ab und ist entlang des Weges konstant. Die Feldlinien von H bilden konzentrische Kreise um den Leiter.

Für anders geformte Leiter ergeben sich andere Bilder für die Feldlinien von \mathbf{H} .

Ein weiteres einfaches Beispiel ist eine lange dünne Zylinderspule (Luftspule, d.h. ohne Eisenkern). Das untere Bild 3 zeigt eine solche Spule, die axial aufgeschnitten ist.

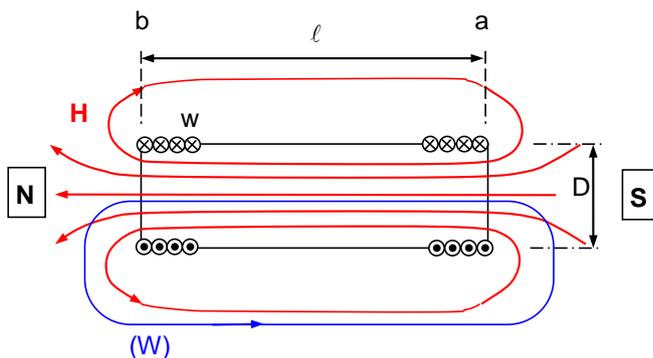


Bild 3: Querschnitt einer langer dünnen Zylinderspule mit \mathbf{H} -Feldlinien

Die Spule hat w eng aneinander liegende Windungen, die den Strom I führen. In die oberen Leiterenden soll der Strom hinein fließen (markiert mit \otimes), aus den unteren Enden fließt I heraus, (markiert mit \odot).

Die Richtung der \mathbf{H} -Linien ermittelt man wieder mit einer Rechtsschraube. Legt man die Finger in Stromrichtung um die Spule, zeigt der Daumen in Richtung von \mathbf{H} .

Im Bild 3 sind nur die innersten Feldlinien geschlossen dargestellt. Die Äußeren schließen sich außerhalb des Bildes. Das Spulenende, wo die Feldlinien austreten, bezeichnet man als Nordpol, das andere als Südpol.

Für diese Anordnung wird das Durchflutungsgesetz angewendet. Der Weg (W) dabei wie im Bild 3 gelegt. Experimentell kann man nachweisen, dass im Innenraum der Spule H nahezu homogen ist, im Außenraum dagegen fast verschwindet.

Daher kann man den Weg (W) in 2 Teile zerlegen, und es folgt aus (1) zunächst:

$$\underbrace{\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Innen}} + \underbrace{\int_b^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Außen}} = Iw . \quad (4)$$

Mit außen verschwindendem H folgt daraus wiederum

$$\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}' \approx H\ell = Iw . \quad (5)$$

Damit erhält man für H innerhalb der Spule: $H \approx \frac{Iw}{\ell} . \quad (6)$

Integriert man in einem Magnetfeld zwischen zwei Punkten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 , ohne dass der Weg geschlossen ist, erhält man die

magnetische Spannung:

$$V_{12} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad [V] = A . \quad (7)$$

Nimmt man das Durchflutungsgesetz (1) und zerlegt den geschlossenen Weg (W) in eine Summe von m Teilwegen folgt zunächst

$$\sum_{j=1}^m \int_{(W_j)} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n I_k \quad (8)$$

und schließlich mit Gl. (7)

$$\sum_{j=1}^m V_j = \sum_{k=1}^n I_k . \quad (9)$$

Diese Gleichung hat, bis auf die rechte Seite, Ähnlichkeit mit dem Maschensatz aus der Gleichstromlehre.

Die zweite Größe, die magnetische Flussdichte \mathbf{B} ist mit der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} über die folgende Gleichung gekoppelt:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (10)$$

Die Größe μ in Gleichung (10) wird als Permeabilität bezeichnet. Sie beschreibt die magnetischen Eigenschaften des Mediums, in dem sich das Magnetfeld ausbildet und wird durch die Gleichung

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (11)$$

beschrieben. Dabei ist μ_0 die sogenannte Permeabilität des Vakuums, eine Naturkonstante mit dem Wert $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \approx 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$ und μ_r ist die relative Permeabilität, die vom Material abhängt.

Für sogenannte ferromagnetische Werkstoffe, vorwiegend solche aus Eisen, aber auch aus Nickel, Cobalt oder Mischverbindungen/Legierungen mit diesen Elementen, ist μ_r eine Funktion der magnetischen Feldstärke H . Die Wirkung von μ_r kommt dadurch zustande, dass in dem

Material Elementarmagnete (Elektronenbahnen, Spin) durch das äußere Feld in dessen Richtung gedreht werden und damit B vergrößern.

Dieser Effekt soll nun zunächst kurz erklärt werden:

In kleinen Gebieten mit ca. $10^6 \dots 10^9$ Atomen sind diese Elementarmagnete jeweils parallel ausgerichtet. Diese Richtungen und auch die Größe der Gebiete, die man als Weißsche Bezirke bezeichnet, sind statistisch verteilt. Die Grenzen der Weißschen Bezirke nennt man Blochwände, siehe Bild 4.

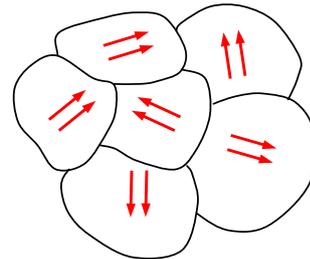


Bild 4: Weißsche Bezirke und Richtung der Elementarmagnete

Legt man nun ein äußeres H-Feld an das immer mehr zunimmt, so werden zunächst die Weißschen Bezirke, deren Ausrichtung dem äußeren Feld nahe kommt, reversibel auf Kosten anderer wachsen und B steigt bei wachsendem H immer stärker an.

Bei weiterer Erhöhung von H wachsen diese Bezirke, deren Ausrichtung dem äußeren Feld nahe kommt, unter Verschwinden von Blochwänden irreversibel. In diesem Bereich ist der Anstieg von B noch stärker.

Schließlich werden bei weiterer Erhöhung von H die Elementarmagnete in Feldrichtung ausgerichtet. B steigt dann bei weiter wachsendem H immer schwächer, zum Schluss sogar nur linear mit dem Anstieg μ_0 an. Bild 5 verdeutlicht diese Prozesse.

Diese Kurve, auch als Neukurve bezeichnet, kann nur einmal durchlaufen werden.

Verringert man das äußere Feld wieder, so bilden sich andere Weißsche Bezirke und es entsteht eine andere Abhängigkeit B(H). Das mehrfache Auf- und Ummagnetisieren dieses Materialstückes ergibt dann die

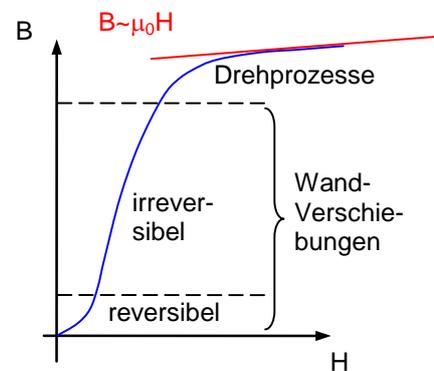


Bild 5: Neukurve

sogenannte Hysteresekurve, dargestellt im Bild 6, die in Richtung der Pfeile durchlaufen wird.

Wie man in der Kurve erkennt, kann man in solchen Werkstoffen nur eine maximale Flussdichte erzeugen, die sich auch mit sehr viel größerem H nicht mehr wesentlich ändert. Man spricht in diesem Fall von Sättigung.

Bei üblichen Magnetwerkstoffen (z.B. bei Trafokernen und in elektrischen Maschinen) liegt dieser Maximalwert für B etwa im Bereich zwischen 1,5 und 2,0 Tesla.

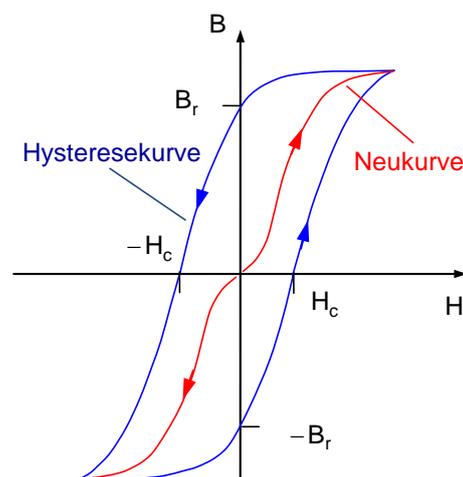


Bild 6: Hysteresekurve

B_r : Remanenzflussdichte, verbleibendes B, wenn $H = 0$ wird.

H_c : Koerzitivfeldstärke, in Gegenrichtung anzulegendes H, bei der $B = 0$ wird.

Für Vakuum und alle anderen Stoffe, wie Gase, Flüssigkeiten, Plast, Glas, Keramik und auch Metalle wie z.B. Kupfer und Aluminium kann mit sehr guter Näherung angenommen werden, das

$$\mu_r = 1 \quad (12)$$

ist.

Integriert man über die Flussdichte \mathbf{B} , die eine Fläche A durchsetzt, so erhält man den magnetischen Fluss, siehe dazu Bild 7

$$\Phi = \int_{(A)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad , \quad [\Phi] = \text{Vs} = 1\text{Wb} \quad (\text{Weber}) \quad . \quad (13)$$

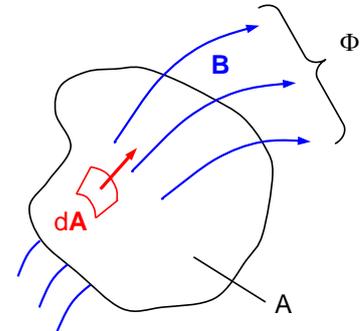


Bild 7: Flussberechnung

Eine Grundeigenschaft des B-Feldes ist, das es auf Grund der geschlossenen Feldlinien keine Quellen oder Senken hat.

Krümmt man nun die Fläche A zu einer geschlossenen Hülle, so gilt daher

$$\Phi = \oint_{(A)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad . \quad (14)$$

Wird nun die geschlossene Hülle wieder in eine Summe von m Teilflächen A_k zerlegt, erhält man aus (14) unter Anwendung von Gleichung (13)

$$\sum_{k=1}^m \int_{(A_k)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m \Phi_k = 0 \quad . \quad (15)$$

Diese letzte Gleichung (15) für die Teilflüsse Φ_k entspricht dem Knotensatz für Ströme in der Elektrotechnik.

2.2. Magnetischer Widerstand und magnetischer Kreis

Zunächst wird per Definition der magnetische Widerstand eines Materialgebietes eingeführt.

$$\text{Def.:} \quad R_m = \frac{V}{\Phi} \quad , \quad [R_m] = \text{A/Vs} \quad . \quad (16)$$

Die Übereinstimmung mit der Strom-Spannungsbeziehung an einem Widerstand R ist wieder offensichtlich.

In Gleichung (16) ist V der magnetische Spannungsabfall längs des Gebietes und Φ der Magnetfluss, der den Querschnitt des Gebietes durchsetzt, siehe dazu Bild 8.

Nimmt man homogene Verhältnisse an, d.h. homogene Feldverteilung von \mathbf{B} und \mathbf{H} , konstanten

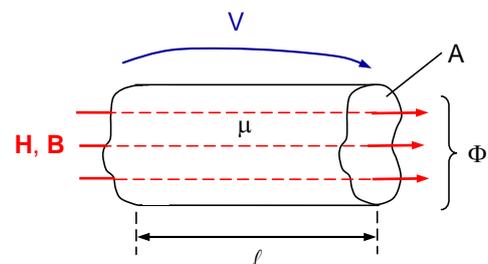


Bild 8: Veranschaulichung zum magnetischen Widerstand

Querschnitt A und $\mu = \text{const.}$, so kann man folgende Dimensionierungsgleichung für R_m aufstellen:

$$R_m = \frac{V}{\Phi}, \quad R_m = \frac{H\ell}{BA} = \frac{H\ell}{\mu HA} \Rightarrow \underline{\underline{R_m = \frac{\ell}{\mu A}}} \quad (17)$$

mit $\mu = \mu_0 \mu_r$.

Ein konstantes μ_r gibt es streng genommen bei Ferromagnetika nicht, näherungsweise wird, wenn sich H bzw. B wenig ändern, mit Werten für μ_r von einigen Hundert gerechnet.

Als magnetische Kreise oder Eisenkreise werden Anordnungen bezeichnet, die aus ferromagnetischen Stücken, evtl. kleinen Luftspalten und stromführenden Wicklungen aufgebaut sind. Im Bild 9 ist ein solcher einfacher Eisenkreis mit Luftspalt und einer Wicklung mit w Windungen dargestellt.

Damit die Berechnung solcher Anordnungen einfach möglich wird, müssen einige Vereinbarungen getroffen werden:

- Gesamter Magnetfluss im Eisen konzentriert, weil $\mu_r \gg 1$ ist, und es gilt $\mu_r = \text{const.}$,
- mittlere Eisenweglänge $\ell_E \gg \ell_L$,
stückweise konstanter Querschnitt A ,
- kleiner ℓ_L Luftspalt: kein Streufeld,
- homogene B -Feldverteilung in jedem Schenkel im Eisen und im Luftspalt.

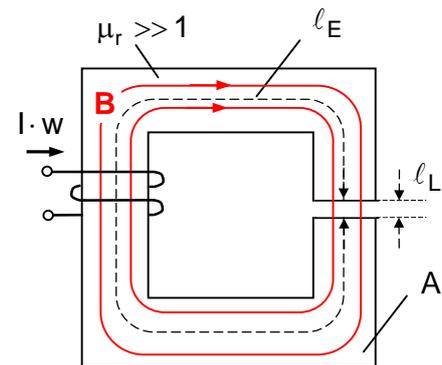


Bild 9: Einfacher Eisenkreis mit einer Wicklung und Luftspalt

Wendet man auf diese Anordnung das Durchflutungsgesetz (8) an und teilt wegen der unterschiedlichen Feldstärke in Eisen und Luft den Integrationsweg auf, so folgt bei Integration entlang einer H-Linie über

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(\text{Eisen})} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(\text{Luft})} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = Iw \quad (18)$$

und

$$H_E \cdot \ell_E + H_L \cdot \ell_L = Iw \quad (19)$$

schließlich

$$V_E + V_L = Iw \quad (20)$$

Wegen der Quellenfreiheit des B -Feldes ist bei gleichem Querschnitt A die Flussdichte im Eisen und Luftspalt gleich

$$B_E = B_L \quad (21)$$

und damit auch der Magnetfluss.

Mit der Vergleichbarkeit von Gl. (9) mit dem Maschensatz, sowie Gl. (15) mit dem Knotensatz und der Definition eines magnetischen Widerstandes (16) ist es möglich, Magnetkreise mit Hilfe von magnetischen Ersatzschaltungen, die an die Gleichstromlehre angelehnt sind, zu berechnen. Damit sind im Weiteren alle aus der Elektrotechnik bekannten Methoden zur Netzwerkbeziehung in vergleichbarer Form anwendbar:

- Maschen- und Knotensätze
- Reihen- und Parallelschaltung magnetischer Widerstände
- Flussteiler und magnet. Spannungsteiler
- Zweigfluss- und Knotenspannungsanalyse
- Überlagerungssatz bei linearen Medien ($\mu = \text{const.}$)
- Grafische Methoden bei nichtlinearen Kreisen.

Das Äquivalent für den Strom I in elektrischen Netzwerken ist hier der Magnetfluss Φ .

Für den einfachen Eisenkreis aus Bild 9 kann man folgende Ersatzschaltung aufstellen, siehe Bild 10. Die auf der rechten Seite des Durchflutungsgesetzes (8), bzw. (9) stehende Summe der Ströme wird auch als Durchflutung Θ bezeichnet und spielt in den Ersatzschaltungen die Rolle einer magnetischen Spannungsquelle V_q , d.h.

$$V_q = \Theta = I \cdot w \quad (22)$$

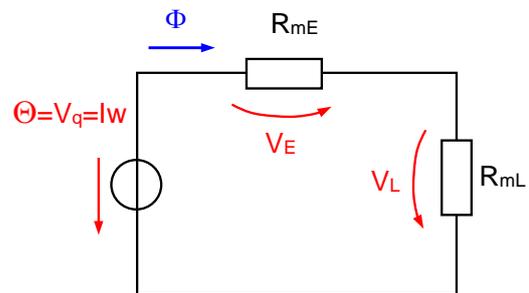


Bild 10: Ersatzschaltung des Eisenkreises aus Bild 9

Mit Hilfe einer Maschengleichung

$$I \cdot w = \Phi \cdot R_{mE} + \Phi \cdot R_{mL} \quad (23)$$

kann man nun den Fluss im Kreis berechnen

$$\Phi = \frac{I \cdot w}{R_{mE} + R_{mL}} \quad (24)$$

Die beiden magnetischen Widerstände lassen sich über die Dimensionierungsgleichung (17) berechnen

$$R_{mE} = \frac{l_E}{\mu_0 \mu_r A} \quad , \quad R_{mL} = \frac{l_L}{\mu_0 A} \quad (25), (26)$$

In vielen Fällen ist R_{mL} größer oder viel größer als R_{mE} .

Als nächstes Beispiel dazu soll ein verzweigter Eisenkreis dienen, wie im Bild 11 dargestellt. Bild 12 zeigt das dazugehörige magnetische Ersatzschaltbild.

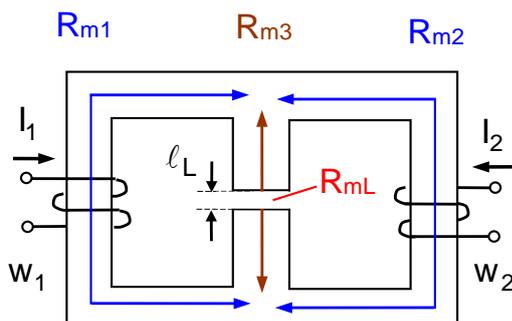


Bild 11: Verzweigter Eisenkreis

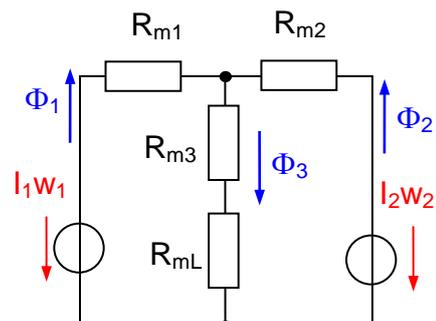


Bild 12: Ersatzschaltung zu Bild 11

Magnetischer Widerstand eines nichtlinearen Eisenkreises mit Luftspalt:

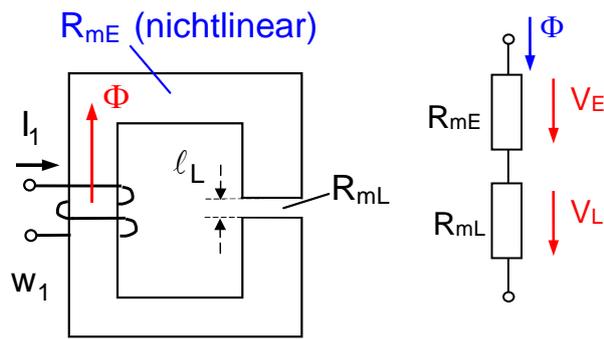


Bild 12: Nichtlinearer Eisenkreis und zugehörige Ersatzschaltung

Zwar gilt für die nebenstehende Abbildung 13 für den magnetischen Gesamtwiderstand R_{mges} die Gleichung:

$$R_{\text{mges}} = R_{\text{mE}} + R_{\text{mL}} \quad , \quad (27)$$

aber die Bestimmung ist bei Berücksichtigung der Nichtlinearität von Eisenwerkstoffen (siehe Abb. 6) ist nur grafisch lösbar.

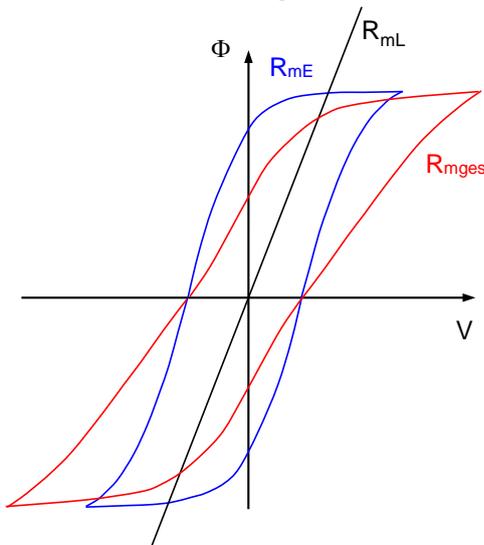


Bild 13: Magnetische Widerstände von Eisen, Luftspalt und magnetischer Gesamtwiderstand.

An Stelle von H und B in Abbildung 6 werden hier Φ und V verwendet, die sich für die angenommene Homogenität des Feldes wie folgt ergeben:

$$\Phi = B \cdot A \quad , \quad V = H \cdot \ell \quad . \quad (28)$$

Für die Länge ℓ muss jeweils die mittlere Eisenweglänge bzw. die Luftspaltlänge verwendet werden. Damit kann man mit Hilfe von Gleichung (16) die Kurven für den magnetischen Widerstand des Luftspaltes R_{mL} und des Eisens R_{mE} zeichnen.

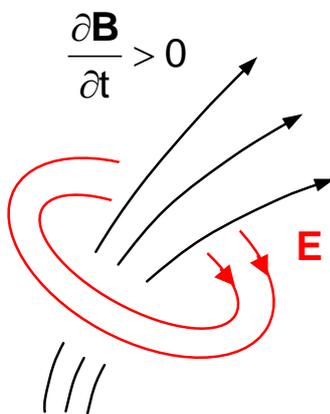
Regel zur Konstruktion von R_{mges} :

- Bei gleichem Fluss Φ die magnetischen Spannungsabfälle V addieren und resultierende Kurve zeichnen.

Der Luftspalt bewirkt eine Linearisierung der Gesamtkennlinie.

2.2. Induktionsvorgänge

Grundgesetz: Ein zeitveränderliches Magnetfeld ist von einem elektrischen Feld im Linksschraubensinn umgeben.



Induktionsgesetz:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

oder umgeformt (Integralsatz von Stokes)

$$\oint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{(A)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad . \quad (28)$$

Eine Veranschaulichung dazu ist im Bild 14 dargestellt.

Bild 14: Veranschaulichung des Induktionsgesetzes

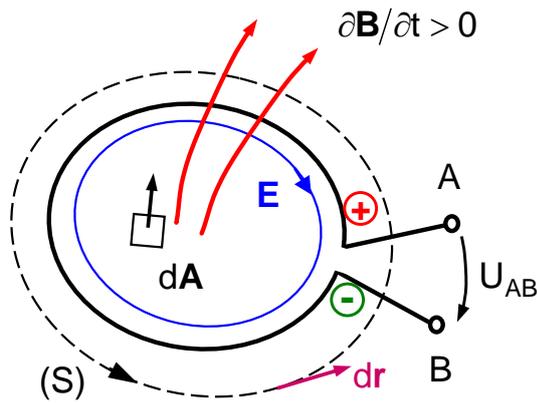


Bild 15: Leiterschleife im zeitveränderlichen Magnetfeld

Bringt man in ein zeitlich veränderliches Magnetfeld eine Leiterschleife ein, siehe Bild 15, so verschiebt das \mathbf{E} -Feld in dieser Schleife Ladungen, die dort ein Gegenfeld bilden, so dass die Schleife als Leiter selbst feldfrei ist.

Die Richtungen des Flächenelementes $d\mathbf{A}$ und des Wegelementes $d\mathbf{r}$ sind so festgelegt, dass sie Gleichung (28) im Sinne einer rechtsschraube entsprechen. Mit (S) wird der Umlaufweg bezeichnet.

Die Richtung des Spannungspfeiles von U_{AB} ist willkürlich gewählt.

Zerteilt man nun das in Gleichung (28) auf der linken Seite stehende Umlaufintegral in zwei Teile, ein Wegintegral entlang der Schleife und ein Wegintegral über die Lücke zwischen den beiden Anschlussdrähten, so erhält man über

$$\oint_{(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}_{=0 \text{ Schleife ist feldfrei}} + \underbrace{\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}_{=-U_{AB}} \quad (29)$$

schließlich die Beziehung für die zwischen den Klemmen A und B induzierte Spannung:

$$U_{AB} = \int_{(A)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \quad (30)$$

Mit der Definition des magnetischen Flusses, siehe Gleichung (13), kann dann U_{AB} wie folgt ausgedrückt werden:

$$U_{AB} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (31)$$

Man beachte, dass das Vorzeichen von U_{AB} von der vorher eingeführten Richtung des Spannungspfeils in Bezug auf Richtung des Umlaufweges, Richtung der Flächenorientierung und der Richtung von \mathbf{B} abhängt!

Durchsetzt der Fluss eine Spule mit w Windungen, so ist Gleichung in (31) an Stelle von Φ der gesamte, diese Anordnung durchsetzende, Induktionfluss Ψ einzusetzen. Für den wichtigen Sonderfall, insbesondere ist das bei Eisenkernen der Fall, dass alle w Windungen den gleichen Fluss Φ umfassen, gilt:

$$\Psi = w \cdot \Phi \quad \text{und damit} \quad U_{AB} = \frac{w \cdot d\Phi}{dt} \quad (32),(33)$$

In diesem Falle wird Ψ auch als verketteter Fluss bezeichnet.

2.3. Selbstinduktivität

Mit Hilfe des Begriffes Selbstinduktivität, oder kürzer Induktivität genannt, modelliert man die Entstehung einer Induktionsspannung an einem Leiter, wenn sich der Strom in diesem Leiter zeitlich ändert. Andererseits wird mit Induktivität ein Bauelement bezeichnet, dessen Verhalten wesentlich durch diesen Effekt bestimmt wird.

Definition der Induktivität:

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad . \quad (34)$$

In Gleichung (34) ist Ψ wieder der gesamte, die Anordnung durchsetzende Induktionsfluss, der für den bereits genannten Sonderfall, das alle Windungen den gleichen Fluss umfassen, durch Gleichung (32) beschrieben werden kann.

Strom-Spannungsbeziehung an einer Induktivität:

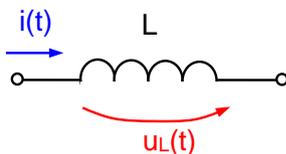


Bild 16: Schaltzeichen einer Induktivität mit Strom und Spannung

Wie bereits beim Induktionsgesetz (Gleichungen (30), (31)) erläutert wurde, entsteht an den Klemmen einer Leiteranordnung eine Induktionsspannung, wenn sich der magnetische Fluss in der Anordnung ändert.

Für den Fall einer Induktivität, wenn das Magnetfeld durch den Strom in dieser Anordnung selbst erzeugt wird, ergibt sich folgender Zusammenhang:

mit der entsprechend umgestellten Gleichung (34), d.h. $\Psi = L \cdot i$ und den Gleichungen (32), (33) folgt die Beziehung

$$u_L = \frac{d}{dt}(L \cdot i(t)) \quad , \quad (35)$$

aus der sich mit Hilfe der Produktregel die Strom-Spannungs-Beziehung an einer Induktivität in folgender Form ergibt

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{dL}{dt} \quad . \quad (36)$$

Für den wichtigen Sonderfall $L = \text{const.}$ vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad . \quad (37)$$

Berechnung von Induktivitäten:

Wir beschränken uns hier auf einige einfache Sonderfälle, bei denen die Berechnung der Induktivität nach folgendem Schema möglich ist:

$$I \Rightarrow H \Rightarrow B \Rightarrow \Phi, \Psi \Rightarrow L = \frac{\Psi}{I}$$

Nach Vorgabe des in der Anordnung fließenden Stromes werden die Feldgrößen H und B berechnet. Daraus wiederum wird der magnetische Fluss Φ bzw. Ψ bestimmt. Unter Anwendung von Gleichung (34) erhält man schließlich die Induktivität L .

Erstes Beispiel soll eine lange dünne Zylinderspule sein, siehe dazu Bild 3. Für die magnetische Feldstärke H im Inneren gilt die Näherung nach Gleichung (6)

$$H \approx \frac{Iw}{\ell} \quad .$$

Mit Gleichung (10), $\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H}$ erhält man die magnetische Flussdichte. Durch Integration über den Spulenquerschnitt ergibt sich der magnetische Fluss, siehe Gleichung (13)

$$\Phi = \int_{(A)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad .$$

Für den Fall eines homogenen Magnetfeldes im Inneren der Spule und rundem Querschnitt vereinfacht sich die Berechnung zu

$$\Phi = B \cdot A \quad \text{mit} \quad A = \pi D^2/4 \quad . \quad (38),(39)$$

Mit Gleichung (32) und der Definition der Induktivität, Gleichung (34), erhält man die Induktivität einer Zylinderspule zu

$$L = \frac{w^2 \mu_0 \pi D^2}{4\ell} \quad . \quad (40)$$

Typisch für alle Induktivitätsberechnungen ist, das

$$L \sim w^2 \quad (41)$$

ist.

Das zweite Beispiel ist ein Eisenkreis mit Luftspalt, siehe dazu Bild 9. Mit den in diesem Absatz angegebenen vereinfachenden Annahmen gelangt man zum magnetischen Ersatzschaltbild, siehe Bild 10. Mit Hilfe von Gleichung (24)

$$\Phi = \frac{I \cdot w}{R_{mE} + R_{mL}}$$

kann der magnetische Fluss im Eisenkreis berechnet werden. Über die Definitionsgleichung der Induktivität, Gleichung (34), erhält man die Induktivität dieser Anordnung zu

$$L = \frac{w^2}{R_m} \quad . \quad (42)$$

2.4. Gegeninduktivität

Mit Hilfe des Begriffes Gegeninduktivität modelliert man die Entstehung einer Induktionsspannung an einem Leiter, wenn sich der Strom in einem anderen Leiter zeitlich ändert. Das Bild 17 verdeutlicht diesen Effekt.

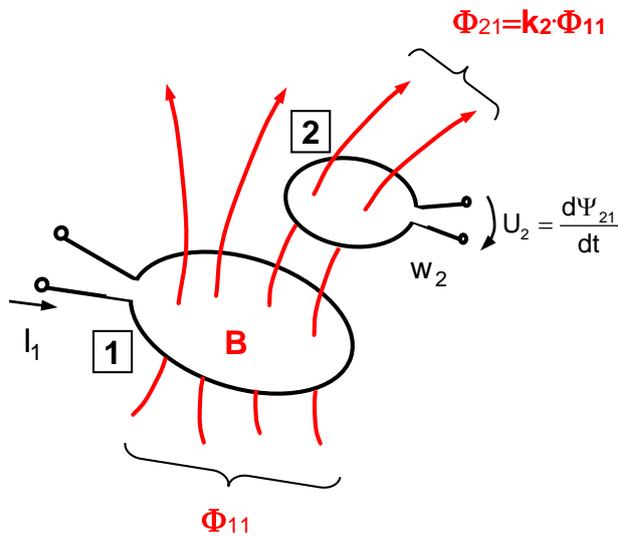


Bild 17: Veranschaulichung der Gegeninduktivität

Der Strom I_1 erzeugt ein Magnetfeld, das die Spule 1 durchsetzt. Der gesamte Fluss im Querschnitt der Spule 1 wird mit Φ_{11} bezeichnet. Ein Teil dieses Flusses durchsetzt die Spule 2, hier als Φ_{21} bezeichnet. Der Flusskoeffizient $k_2 \leq 1$ hängt dabei von der gegenseitigen Anordnung der beiden Spulen ab.

An dieser Stelle soll die Doppelindizierung am Beispiel Φ_{21} erläutert werden. Der erste Index, also 2, gibt die Stelle an, wo der Effekt betrachtet wird, d.h. die Spule 2. Der zweite Index, also 1, bezeichnet die Ursache, hier der Strom I_1 .

Ändert sich nun der Strom I_1 , so ändert sich auch Φ_{21} und an den Klemmen der Spule 2 entsteht eine Induktionsspannung U_2 . Um diesen Vorgang zu beschreiben, definiert man die Gegeninduktivität

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad \text{bzw. mit (32)} \quad M_{21} = \frac{w_2 \cdot \Phi_{21}}{I_1} \quad . \quad (43),(44)$$

Keht man die Erregung um, d.h. in Spule 2 fließt der Strom I_2 , so durchsetzt dort der Fluss Φ_{22} ihren Querschnitt, und ein Teil davon

$$\Phi_{12} = k_1 \cdot \Phi_{22} \quad (45)$$

durchsetzt die Spule 1. Auch hier gilt $k_1 \leq 1$. Ändert sich I_2 , so ändert sich Φ_{12} und an den Klemmen von Spule 1 entsteht U_1 . Somit kann zur Beschreibung dieses Vorganges die Gegeninduktivität

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} \quad \text{bzw. mit (32)} \quad M_{12} = \frac{w_1 \cdot \Phi_{12}}{I_2} \quad (46),(47)$$

definiert werden.

Man kann beweisen, das immer

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (48)$$

gilt.

Das ist insofern sehr wichtig, weil man nicht in jeder Anordnung von Spulen beide Gegeninduktivitäten gleich gut berechnen kann.

Bringt man Gleichung (43) in die Form

$$\Psi_{21} = M_{21} \cdot I_1 \quad , \quad (49)$$

so erhält man mit Gleichung (33) und (48)

$$U_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} \quad . \quad (50)$$

Analog gilt in anderer Richtung bei Erregung von Spule 2

$$U_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} = M \frac{dI_2}{dt} \quad . \quad (51)$$

Die Flusskoppelfaktoren k_2 und k_1 beschreiben den Anteil des in einer Spule erzeugten Flusses, der jeweils die andere Spule durchsetzt, d.h., man kann sie in der Form

$$k_2 = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} \quad , \quad \text{bzw.} \quad k_1 = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} \quad (52),(53)$$

ausdrücken.

Bei Luftspulen hängen diese Faktoren vom Abstand der Spulen und der Ausrichtung ihrer Achsen ab. In verzweigten Eisenkreisen, siehe beispielsweise Bild 11, die man zweckmäßig über Ersatzschaltungen berechnet, werden die Flusskoppelfaktoren durch die Gleichungen zur Flussteilung für die einzelnen Schenkel beschrieben.

Selbst bei unverzweigten Eisenkreisen, siehe Bild 9, wenn man diese Anordnung mit einer zweiten Wicklung ergänzt, sind die Flusskoppelfaktoren nicht Eins, da an den Ecken der Schenkel Feldlinien austreten, die sich außerhalb des Kernes schließen und nicht die andere Spule durchsetzen.

Unter Anwendung der Gleichungen (44), (52) erhält man für M_{12} und analog dazu für M_{21} die Beziehungen

$$M_{12} = \frac{k_1 \cdot w_1 \cdot \Phi_{22}}{I_2} \quad , \quad M_{21} = \frac{k_2 \cdot w_2 \cdot \Phi_{11}}{I_1} \quad . \quad (54),(55)$$

Durch Multiplikation von (54) und (55) sowie mit Gleichung (48) erhält man

$$M = \sqrt{\frac{k_1 \cdot w_1 \cdot \Phi_{22}}{I_2} \cdot \frac{k_2 \cdot w_2 \cdot \Phi_{11}}{I_1}} \quad , \quad (56)$$

Woraus sich mit der Definition der Induktivitäten L_1 und L_2 (nach (32),(34)) schließlich

$$M = \sqrt{k_1 \cdot k_2} \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad (57)$$

ergibt.

Als Koppelfaktor k und als Streufaktor σ definiert man

$$k = \sqrt{k_1 \cdot k_2} \quad , \quad \sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} \quad . \quad (58),(59)$$

2.4. Strom-Spannungs-Beziehung in Reihe geschalteter Induktivitäten

Die Strom-Spannungs-Beziehung in Reihe geschalteter Induktivitäten und damit auch die wirksame Gesamtinduktivität unterscheidet sich, je nachdem, ob die Spulen magnetisch gekoppelt sind oder nicht, d.h. ob der von einer Induktivität erzeugte Magnetfluss die andere Spule durchsetzt. Sind die Induktivitäten gekoppelt, ist der Koppelsinn zu berücksichtigen, d.h. in welcher Richtung das \mathbf{B} -Feld die Spule durchsetzt, wodurch das Vorzeichen der induzierten Spannung bestimmt wird, siehe dazu Bild 15.

Nicht gekoppelte Induktivitäten:

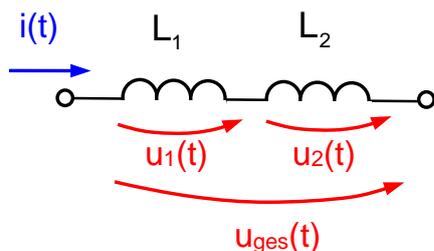


Bild 18: Reihenschaltung nicht gekoppelter Induktivitäten

Für die nebenstehende Schaltung Bild 18 gilt

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di}{dt} \quad , \quad u_2 = L_2 \cdot \frac{di}{dt} \quad . \quad (60),(61)$$

Für die gesamte Spannung über der Reihenschaltung erhält man

$$u_{\text{ges}} = u_1 + u_2 \quad . \quad (62)$$

Mit der Strom-Spannungs-Beziehung für die Gesamtinduktivität

$$u_{\text{ges}} = L_{\text{ges}} \cdot \frac{di}{dt} \quad (63)$$

erhält man diese mit (60), (61), (62) zu

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 \quad . \quad (64)$$

Gleichsinnig gekoppelte Induktivitäten:

Gleichsinnig gekoppelt bedeutet, dass die durch eine Gegeninduktivität von einer anderen Spule induzierte Spannung so gerichtet ist, dass sich diese zu der durch die Eigeninduktivität hervorgerufenen Spannung addiert. In einer Schaltung kennzeichnet man das durch einen Punkt, auf den der Strom zu fließt, siehe Bild 19.

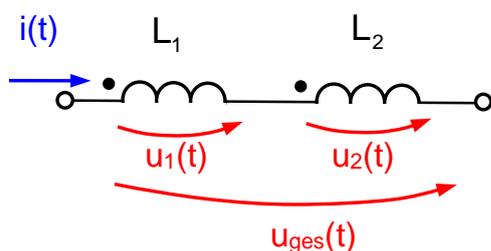


Bild 19: Gleichsinnig gekoppelte Induktivitäten

Für die nebenstehende Schaltung Bild 19 gilt

$$u_1 = L_1 \cdot \frac{di}{dt} + M_{21} \cdot \frac{di}{dt} = (L_1 + M) \frac{di}{dt} \quad , \quad (65)$$

$$u_2 = L_2 \cdot \frac{di}{dt} + M_{12} \cdot \frac{di}{dt} = (L_2 + M) \frac{di}{dt} \quad . \quad (66)$$

Für die gesamte Spannung über der Reihenschaltung gilt wieder Gleichung (63).

Damit erhält man in diesem Falle die Gesamtinduktivität zu

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 + 2 \cdot M \quad , \quad (67)$$

singgemäß ergibt sich bei gegensinnig gekoppelten Induktivitäten

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 - 2 \cdot M \quad . \quad (68)$$

3. Vorbereitungsaufgaben

- 3.1. Gegeben ist nachstehende Wertetabelle eines ferromagnetischen Kernmaterials für Auf- und Entmagnetisierung.

Aufmagnetisierung (H steigt):

H/Acm^{-1}	-25	-15	-5	0	2,5	5	7,5	10	15	25	35
$B/\text{Vs m}^{-2}$	-1,1	-1,05	-0,9	-0,7	-0,5	0	0,5	0,7	0,9	1,05	1,1

Entmagnetisierung (H fällt):

H/Acm^{-1}	25	15	5	0	-2,5	-5	-7,5	-10	-15	-25	-35
$B/\text{Vs m}^{-2}$	1,1	1,05	0,9	0,7	0,5	0	-0,5	-0,7	-0,9	-1,05	-1,1

- a) Konstruieren Sie daraus die Kennlinie $\Phi = f(V_{\text{Fe}})$ bei einer Eisenlänge $\ell_{\text{Fe}} = 20 \text{ cm}$ und einem Querschnitt $A = 1 \text{ cm}^2$.
- b) Zeichnen Sie in dieses Diagramm die Kennlinie für den magnetischen Widerstand R_{mL} eines Luftspaltes ein, $\ell_{\text{L}} = 1,256 \text{ mm}$, $A = 1 \text{ cm}^2$.
- c) Konstruieren Sie die Kennlinie $\Phi = f(V_{\text{Fe}} + V_{\text{L}})$ für den Eisenkern mit Luftspalt (Scherung der Magnetisierungskurve).
- 3.2. Zeigen Sie für den im Bild 20 dargestellten, dass $M_{12} = M_{21}$ gilt, wenn $\mu = \text{const.}$ vorausgesetzt wird. Der Querschnitt A des Eisenkerns ist überall gleich groß.

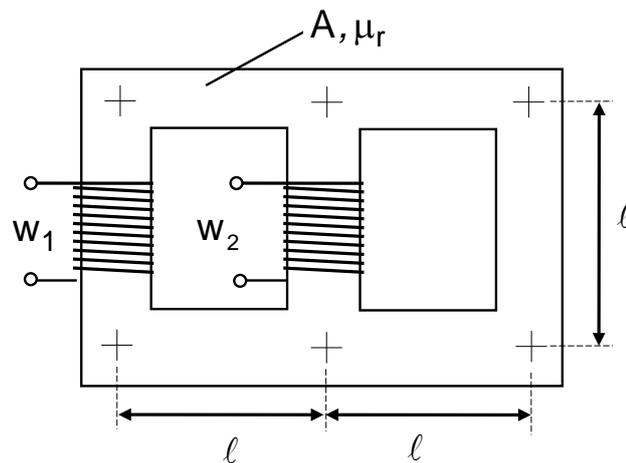


Bild 20: Magnetkreis mit 2 Wicklungen

4. Messaufgaben

4.1. Messen Sie für den aus Spule und Kern mit U-I-Schnitt bestehenden magnetischen Grundkreis, siehe Bild 21, die Zusammenhänge $I = f(U)$ und $\Phi = f(U)$.

- Ohne Luftspalt und
- mit Luftspalt $\ell_L = 2 \text{ mm}$.
- Ermitteln Sie aus den aufgenommenen Kennlinien die Funktionen $\Phi = f(I)$ und $L = f(I)$.
Stellen Sie diese graphisch dar.
- Ermitteln und stellen Sie für den Fall a) die Funktionen $B = f(H)$ und $\mu_r = f(H)$ dar.

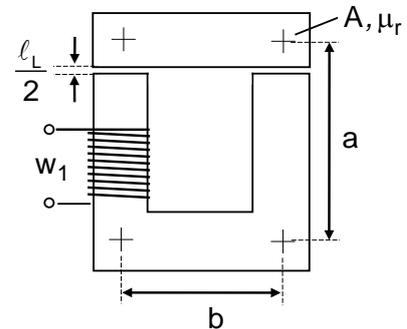


Bild 21: Eisenkreis mit U-I-Schnitt und einer Wicklung

4.2. Messen Sie für den Magnetkreis nach Aufgabe 4.1. den Zusammenhang zwischen Magnetfluss Φ , und der Windungszahl w der Erregerspule für $I = \text{const.}$ Stellen Sie diesen graphisch dar.

4.3. Bestimmen Sie für die in Bild 22 dargestellte Anordnung (Kern mit U-I-Schnitt, Luftspalt ℓ_L sowie zwei Erregerspulen mit w_1 und w_2 Windungen die Induktivitäten L für

- die Spule mit w_1 Windungen,
 - die Spule mit w_2 Windungen,
 - gleichsinnige Reihenschaltung beider Wicklungen,
 - gegensinnige Reihenschaltung beider Wicklungen,
- mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessungen.
- Berechnen Sie aus diesen Werten die Gegeninduktivität M und den Kopplungsfaktor k zwischen beiden Spulen.

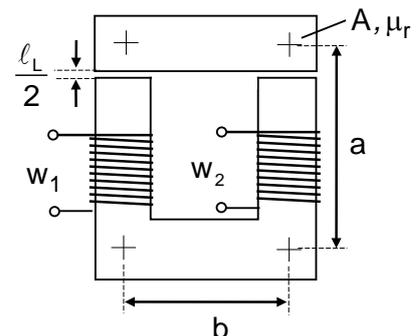


Bild 22: Eisenkreis mit U-I-Schnitt und zwei Wicklungen

4.4. Bestimmen Sie für den im Bild 23 abgebildeten verzweigten Magnetkreis (Kern mit E-I-Schnitt, Luftspalte ℓ_{L1} , ℓ_{L2} und ℓ_{L3} , sowie den Erregerwicklungen w_1 und w_2) den Magnetfluss Φ_3 im Außenschenkel bei

- Nur Erregung von Wicklung w_1 ,
- nur Erregung von Wicklung w_2 mit jeweils dem gleichem Strom I .
- Errechnen Sie aus den Messwerten von a) und b) den Fluss für die Fälle
 - gleichsinnige Erregung beider Wicklungen,
 - gegensinnige Erregung beider Wicklungen.
 Überprüfen Sie die Ergebnisse durch Messung.
- Wiederholen Sie die Messungen ohne Luftspalte.

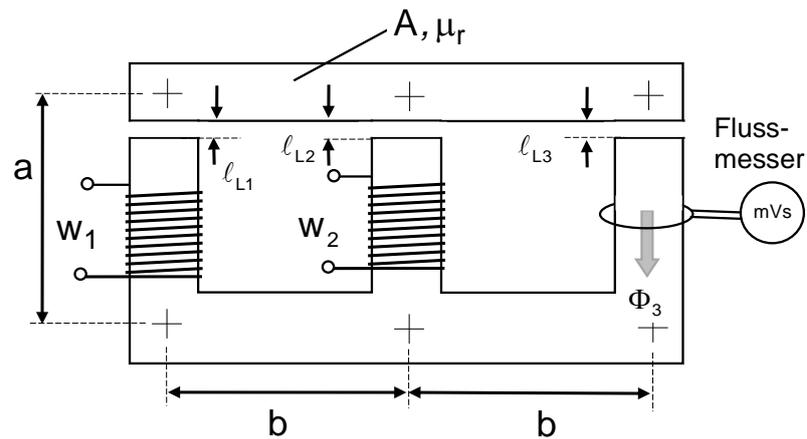


Bild 23: Eisenkreis mit EI-Schnitt und zwei Wicklungen

- 4.5. Bestimmen Sie für die Anordnung nach 4.4. (ohne Luftspalt) die Flusskoeffizienten k_1 und k_2 zwischen den Schenkeln 1 und 2 und errechnen Sie daraus den Koeffizienten k .
- 4.6. Bestimmen Sie für die Anordnung nach 4.4. (ohne Luftspalt) mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessungen die Induktivitäten L_1 und L_2 der beiden Spulen sowie die Gegeninduktivitäten M_{12} und M_{21} und berechnen Sie daraus k .
Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Aufgabe 4.5.