

## Qualitätskontrolle geodätischer Messungen am Beispiel des Lagepunktvergleichs

Rüdiger Lehmann

Fachbereich Vermessungswesen/Kartographie, Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

### ZUSAMMENFASSUNG :

*Geodätische Messungen müssen als Grundlage zur Lösung geokinematischer Fragestellungen einer besonderen Qualitätskontrolle unterzogen werden. Neue Entwicklungen der Gerätetechnik und der Datenanalyse geben Anlass, die klassischen Qualitätskriterien zu überdenken und gegebenenfalls zu modifizieren. Am Beispiel des Lagepunktvergleichs demonstrieren wir, wie neue Ideen der Analyse unscharfer Daten zu einem veränderten Konzept der Qualitätskontrolle für Lagepunkte führen. Intervallarithmetische Modellrechnungen verdeutlichen, dass in vielen Fällen die Qualität dieser Punkte nicht kontrollierbar ist.*

### ABSTRACT:

*Geodetic measurements as fundamental data for the solution of geokinematic problems have to be controlled with respect to their quality in a special way. New developments in hardware and data analysis methods give rise to a redesign of classical quality criteria. Using the horizontal point comparison as an example, we demonstrate how new ideas of fuzzy data analysis lead to a new concept of quality control for horizontal points. Interval arithmetic computations show that in many cases the quality of horizontal points is uncontrollable.*

## 1 Einleitung

Geokinematische Untersuchungen stützen sich meist auf geodätische Messungen: Tachymeter- und GPS-Messungen, Nivellement sowie vielfältige Spezialmessverfahren. Dabei werden an die Qualität solcher geodätischer Messungen gewöhnlich hohe Anforderungen gestellt. Geokinematische Fragen sind typischerweise Fragen nach der Bewegung von Punkten, wie sie durch geotechnische oder natürliche Prozesse hervorgerufen werden, wobei die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen oft sehr klein sind. Es wird deshalb gefordert:

1. Messungen müssen **ausreichend genau** sein. Genauigkeit drückt im modernen Sinne die „Qualität des Entwurfs“ geodätischer Messungen (Niemeier 2002) aus.
2. Messungen müssen **ausreichend zuverlässig** sein. Hierunter versteht man heute die „Qualität der Realisierung“ geodätischer Messungen (Niemeier 2002).

Um nachzuweisen, dass die gestellten Anforderungen erfüllt wurden, unterzieht man geodätische Messungen einer Qualitätskontrolle. Dazu müssen Kriterien definiert sein, für die man untersuchen muss, ob sie für vorliegende Messungen erfüllt sind oder nicht. Dies sind in der aktuellen Praxis die Folgenden:

1. **Genauigkeitskriterien:** geschätzte Kofaktoren, Standardabweichungen und Korrelationen zu bestimmender Parameter; Punktfehlermaße zu bestimmender Punkte, etc.
  - a. **Innere Genauigkeit:** Es werden nur zufällige Messabweichungen aus überschüssigen Messungen eines Verfahrens untersucht.
  - b. **Äußere Genauigkeit:** Es werden auch systematische Messabweichungen aus unabhängigen Vergleichsmessungen mit einer anderen Messtechnologie einbezogen.
2. **Zuverlässigkeitskriterien:** Redundanzanteile, standardisierte Verbesserungen, etc.
  - a. **Innere Zuverlässigkeit:** Es wird versucht, anhand überschüssiger Messungen Modellfehler nachzuweisen.
  - b. **Äußere Zuverlässigkeit:** Es wird untersucht, inwieweit nicht mehr aufdeckbare Modellfehler die zu bestimmenden Parameter verfälschen können.

Die theoretischen Grundlagen sind gefestigt und die Methoden in der Praxis vielfach bewährt, vor allem auf dem Gebiet der klassischen geodätischen Netzausgleichung. Auf anderen Feldern wie der GPS-Vermessung bestehen hingegen noch Defizite.

## 2 Neue Entwicklungen

Neue Entwicklungen im Bereich der Gerätetechnik und der Methodik der Datenanalyse lassen jedoch Folgendes erkennen:

- Automatisierte Messverfahren liefern oft eine hohe Anzahl überschüssiger Messungen in kürzester Zeit. Man denke an 3D-Laserscanner, die heute z.B. im Tunnelbau eingesetzt werden. Damit ist die innere Genauigkeit sehr gut kontrollierbar. Jedoch wird aus Kostengründen auf eine unabhängige Messtechnologie verzichtet, so dass ein Defizit bei der äußeren Genauigkeit entsteht.
- Durch die hohe Anzahl überschüssiger Messungen kann man es sich zunehmend erlauben, ausreißerverdächtige Messungen zu eliminieren. Die verbleibenden Messungen liefern immer noch eine ausreichend hohe Qualität. Dabei wird übersehen, dass wenn ausreißerverdächtige Messungen nach Belieben gestrichen werden („ $3\sigma$ -Regel“ o.ä.), die restlichen Messungen immer sehr gut zueinander passen und damit eine hohe Qualität

auch vortäuschen können. Ausreißer dürfen weiterhin nur gestrichen werden, wenn ausreichend sicher ist, dass diese durch ungewöhnliche Fehlerursachen hervorgerufen wurden.

- Die traditionelle geodätische Kontrollmöglichkeit durch Einsatz eines Messverfahrens übergeordneter Genauigkeit ist selten anwendbar, da man sich bereits auf einem hohen, jedoch technologisch sinnvollen Genauigkeitsniveau bewegt. Über die Zuverlässigkeit ist dadurch nichts gesagt. Diese kann auch auf diesem Niveau niedrig sein. Genauigkeit sagt nichts über Zuverlässigkeit aus und umgekehrt.
- Durch die fortschreitende Elektronisierung der geodätischen Messtechnik ist das geodätische Messgerät eine „Black Box“ geworden. Die Versuche des gewöhnlichen Nutzers, seine Funktionsweise zu ergründen, scheitern meist. Die Qualität geodätischer Messungen kann nur noch anhand des Input/Output-Verhaltens dieser Geräte kontrolliert werden.
- Komplexe Messtechnologien wie GPS lassen es schwer oder unmöglich werden, korrekte Modelle zu formulieren. Man ist häufig gezwungen, Effekte zu vernachlässigen (z.B. Korrelationen von GPS-Messwerten), weil der Aufwand zu ihrer strengen Erfassung immens sein würde. Zwar sind die Werte von Parametern, etwa Koordinaten von GPS-Punkten, meist nicht nennenswert durch diese Vernachlässigungen verfälscht, jedoch kann es in diesem Fall unmöglich sein, deren Qualität zu gewährleisten.
- Durch die Nutzung komplexer Softwareprodukte zur Auswertung geodätischer Messungen ist der Nutzer auf die eingebauten Qualitätskontrollen der Auswertesoftware angewiesen. Diese sind abgesehen von einigen wissenschaftlich orientierten Netzausgleichsprogrammen äußerst mangelhaft oder gar nicht vorhanden. Insbesondere bei kommerziellen Softwareprodukten für den vermessungstechnischen Außendienst ist das Niveau eingebauter Qualitätskontrollen von jeher niedrig und mittlerweile sogar noch im Sinken gegen Null begriffen.
- In der Datenanalyse sind Ansätze verfolgt worden, neben der zufälligen Variabilität von Messwerten deren unscharfen Charakter zu berücksichtigen und in Modelle einzubauen (z.B. Bandemer und Näther 1992). Hierbei werden die Messwerte und ggf. auch Zusatzparameter und Gewichte als unscharfe Zahlen bzw. Vektoren angesehen. Mittlerweile gibt es auch erste wissenschaftliche Arbeiten auf dem Gebiet der Geodäsie (Kutterer 2002).

### 3 Qualitätskontrollen für Lagepunkte

Qualitätskontrollen für Lagepunkte werden korrekt mittels des sogenannten Lagepunktvergleiches durchgeführt. Dabei wird ein Lagepunkt mehrmals durch unabhängige Messungen bestimmt.

**Beispiel 1:** Es wird ein Punkt mehrmals durch GPS bestimmt, wobei die Zeit zwischen den Besetzungen mindestens eine Stunde beträgt und zwischendurch idealerweise auch die Ausrüstung getauscht wird. Dann sind die Messungen ausreichend unabhängig.

**Beispiel 2:** Ein Polarpunkt wird von unterschiedlichen Anschlusspunkten aus und idealerweise auch mit unterschiedlichen Tachymetern gemessen. Auch hier kann jetzt von unabhängigen Messungen ausgegangen werden.

Es werden dann die Lösungen verglichen. Wenn die Abweichung der Lösungen eine gewisse kritische Größe überschreitet, kann man annehmen, dass

- eine oder mehrere Lösungen falsch sind oder
- der Punkt sich zwischen den Bestimmungen bewegt hat.

Welche von beiden Ursachen zutrifft, kann anhand dieses Vergleichs nicht entschieden werden.

Falsche Lösungen müssen dann berichtigt oder verworfen werden. Ursache für falsche Lösungen ist ein unkorrektes funktionales oder stochastisches Modell, wenn z.B. grobe oder systematische Fehler aufgetreten sind, aber nicht berücksichtigt oder eliminiert wurden.

Sich bewegende Punkte hingegen liefern wichtige Antworten auf geokinematische Fragestellungen.

Um keine falschen Lösungen unerkannt zu lassen und auch keine falschen Antworten auf geokinematische Fragestellungen zu gewinnen, ist es wichtig, dass der Lagepunktvergleich korrekt ausgeführt wird, und nicht etwa eine willkürliche Annahme für die maximal zulässige Abweichung der verschiedenen Lösungen getroffen wird, wie es in der Praxis leider gelegentlich gemacht wird.

Ein korrekter Lagepunktvergleich setzt voraus, dass neben den Lösungskordinaten deren Genauigkeiten bekannt sind oder geschätzt wurden. Hier wird in der Literatur streng nach bekannten theoretischen Standardabweichungen  $\sigma$  und empirischen Standardabweichungen  $s$  unterschieden. In vielen Fällen der heutigen Praxis, insbesondere bei GPS-Messungen ist dieser Unterschied aber unwesentlich. Empirische Standardabweichungen unterscheiden sich nicht deshalb von den theoretischen Werten, weil der Stichprobenumfang zu ihrer Berechnung zu gering war, sondern weil sie auf der Grundlage eines unkorrekten Modells berechnet wurden!

Sollten Standardabweichungen nicht aus GPS-Rohmesswerten, sondern aus Koordinaten doppelt bestimmter Punkte abgeleitet worden sein, so ist die Situation anders. Hier wird in den nachfolgenden Tests stets die F-Verteilung statt der  $\chi^2$ -Verteilung zu verwenden sein.

## 4 Durchführung des Lagepunktvergleichs

Gegeben seien  $\mathbf{x}_1, \Sigma_1, \mathbf{x}_2, \Sigma_2$  die Koordinaten und die zugehörigen a-posteriori-Kovarianzmatrizen der Lösungen 1 und 2 für einen zu bestimmenden Lagepunkt mit

$$\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \rho \sigma_{x_i} \sigma_{y_i} \\ \rho \sigma_{x_i} \sigma_{y_i} & \sigma_{y_i}^2 \end{pmatrix}, \quad i=1,2.$$

Die Nullhypothese des Lagepunktvergleichs lautet

$$H_0: E\{ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \} = 0.$$

Um diese Hypothese zu testen, wird das Konfidenzellipsoid von  $\Delta \mathbf{x} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$  berechnet. Dieses überdeckt mit einer gewählten Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  den wahren Wert von  $\Delta \mathbf{x}$ :

$$P(\Delta \mathbf{x}^T \Sigma_{\Delta \mathbf{x}}^{-1} \Delta \mathbf{x} < \chi_{2,1-\alpha}^2) = 1 - \alpha$$

mit

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad \text{und} \quad \Sigma_{\Delta \mathbf{x}} := \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_{12}$$

wobei die letzte Matrix die Kreuzkovarianzen enthält, die bei nach Voraussetzung unabhängigen Messungen, die zu  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  führen, alle Null sind:  $\Sigma_{12} = 0$ .

Mit der Inversen der Kovarianzmatrix

$$\Sigma_{\Delta \mathbf{x}}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2 & -\rho_1 \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} - \rho_2 \sigma_{x_2} \sigma_{y_2} \\ -\rho_1 \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} - \rho_2 \sigma_{x_2} \sigma_{y_2} & \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 \end{pmatrix}}{(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)(\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2) - (\rho_1 \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} + \rho_2 \sigma_{x_2} \sigma_{y_2})^2}$$

erhält man die explizite Darstellung

$$T(\Delta \mathbf{x}) := \Delta \mathbf{x}^T \Sigma_{\Delta \mathbf{x}}^{-1} \Delta \mathbf{x}$$

$$= \frac{(\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2) \Delta x^2 - 2(\rho_1 \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} + \rho_2 \sigma_{x_2} \sigma_{y_2}) \Delta x \Delta y + (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2) \Delta y^2}{(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)(\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2) - (\rho_1 \sigma_{x_1} \sigma_{y_1} + \rho_2 \sigma_{x_2} \sigma_{y_2})^2}$$

für die Prüfgröße T des Tests. Man kommt nun zu einem Annahmebereich  $A(\alpha, H_0)$  und einem Verwerfungsbereich  $V(\alpha, H_0)$  der Hypothese  $H_0$ . Wählen wir die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha=5\%$ , so ergeben sich mit  $\chi_{2,1-\alpha}^2 = \chi_{2,0.95}^2 = 5.99$  folgende Annahme- und Verwerfungsbereiche:

$$T(\Delta \mathbf{x}) < 5.99 \Rightarrow \Delta \mathbf{x} \in A(0.05, H_0)$$

$$T(\Delta \mathbf{x}) \geq 5.99 \Rightarrow \Delta \mathbf{x} \in V(0.05, H_0)$$

**Spezialfall:** Im homogenen und isotropen Fall  $\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{y_2} = \sigma$  und  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  vereinfacht sich die Testgröße zu

$$T(\Delta \mathbf{x}) = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2\sigma^2}.$$

Die Hypothese wird also angenommen, wenn  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| < 3,46\sigma$  beträgt, ansonsten verworfen.

Dieser Fall wird in der Literatur ausschließlich diskutiert, z.B. in (Lienhardt u.a. 2003). Im allgemeinen Fall, wo die Fehlerellipsen nicht zu Kreisen entarten, existiert ein solch einfaches Qualitätskriterium bzw. Kriterium zum Nachweis von Punktbewegungen nicht.

## 5 Intervallarithmetische Untersuchungen

Werden durch ein unkorrektes stochastisches oder funktionales Modell falsche Varianzen und Kovarianzen erhalten, so kann die Aussage des Lagepunktvergleichs verfälscht werden. Man kommt dann zur Ablehnung einer richtigen Hypothese  $H_0$  mit einer u.U. wesentlich höheren Wahrscheinlichkeit als die gewählte Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  vorgibt, wonach richtige Lösungen  $\mathbf{x}$  vermehrt verworfen werden. Genauso wird auch die Annahme einer falschen Hypothese häufiger auftreten. Das bedeutet, dass mehr falsche Lösungen akzeptiert werden.

Es soll nun untersucht werden, in welchem Maße diese Verfälschungen des Lagepunktvergleichs eintreten können. Dazu bedienen wir uns der Intervallarithmetik. Wir nehmen zu jeder Standardabweichung  $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{y_2}$  und jedem Korrelationskoeffizienten  $\rho_1, \rho_2$  je ein Intervall an, in welchem diese Werte liegen können. Danach ergibt sich durch intervallarithmetische Verknüpfungen die Prüfgröße T ebenfalls als Intervall  $[T_{\min}, T_{\max}]$ . Es ergeben sich nunmehr drei Bereiche: ein Annahmebereich  $A(\alpha, H_0)$  und ein Verwerfungsbereich  $V(\alpha, H_0)$  der Hypothese  $H_0$  sowie ein Unentscheidbarkeitsbereich  $U(\alpha, H_0)$ , in dem je nach konkreten Werten der Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten die Hypothese entweder angenommen oder verworfen werden müsste.

$$T_{\max}(\Delta \mathbf{x}) < 5.99 \Rightarrow \Delta \mathbf{x} \in A(0.05, H_0)$$

$$T_{\min}(\Delta \mathbf{x}) \geq 5.99 \Rightarrow \Delta \mathbf{x} \in V(0.05, H_0)$$

$$\text{sonst} \Rightarrow \Delta \mathbf{x} \in U(0.05, H_0)$$

Der Unentscheidbarkeitsbereich ist also dadurch gekennzeichnet, dass der kritische Wert der Prüfgröße genau in das Intervall  $[T_{\min}, T_{\max}]$  fällt.

**Fall A:** Wir untersuchen zunächst den einfachsten Fall, dass Korrelationen vernachlässigt wurden oder unbekannt sind und Standardabweichungen für alle Koordinaten gleich groß angegeben wurden:

$$\sigma_{x_i}, \sigma_{y_i} \in [\sigma - \Delta\sigma, \sigma + \Delta\sigma] \quad \text{und} \quad \rho_i \in [-\Delta\rho, \Delta\rho], \quad i=1,2$$

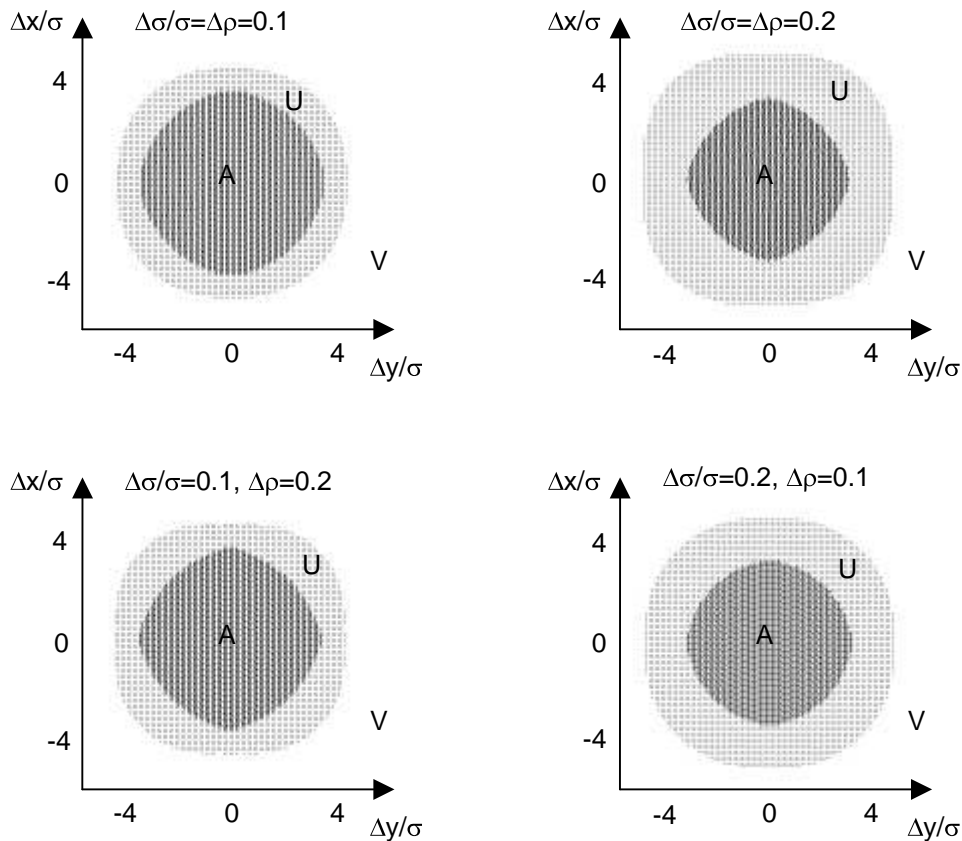


Abb 1: Annahme-, Unentscheidbarkeits- und Verwerfungsbereiche (A,U,V) im Fall A

Man erkennt in Abbildung 1, dass sich schon bei geringen Unschärfen, d.h. für enge Intervalle der Korrelationen und Standardabweichungen sehr große Unentscheidbarkeitsbereiche ergeben.  $\Delta\sigma/\sigma=0.2$  bedeutet also, dass die Standardabweichungen nur um maximal 20% zu groß oder zu klein erhalten werden können. Ein solcher Wert wird in der Praxis ohne Weiteres übertroffen.

Der Annahmebereich ist näherungsweise ein Kreis, sein Radius  $R_A$  variiert wie folgt

$$\begin{aligned} \Delta\sigma/\sigma = \Delta\rho = 0.1 &\Rightarrow R_A = (2.97 \dots 3.04) \sigma \\ \Delta\sigma/\sigma = 0.1, \Delta\rho = 0.2 &\Rightarrow R_A = (2.80 \dots 3.00) \sigma \\ \Delta\sigma/\sigma = 0.2, \Delta\rho = 0.1 &\Rightarrow R_A = (2.64 \dots 2.71) \sigma \\ \Delta\sigma/\sigma = \Delta\rho = 0.2 &\Rightarrow R_A = (2.48 \dots 2.70) \sigma \end{aligned}$$

Dem muss man den Wert  $3,46\sigma$  gegenüber stellen, der im vorangegangenen Abschnitt für den Fall scharfer Korrelationen und Standardabweichungen ( $\Delta\sigma = \Delta\rho = 0$ ) hergeleitet wurde. Die Unterschiede sind nicht zu übersehen.

**Fall B:** Gehen wir jetzt von dem optimistischen Fall  $\Delta\sigma/\sigma = \Delta\rho = 0.1$  aus, dass also die Korrelationen und Standardabweichungen recht scharf bestimmt werden konnten. Erfahrungsgemäß hat man bei GPS-Punkten in mittleren Breiten keine fast kreisförmigen Fehlerellipsen, sondern es gilt  $\sigma_x \approx 1.5\sigma_y$ . Ursache ist die ungleichmäßige Verteilung der Satelliten am Himmel („Nordloch“).

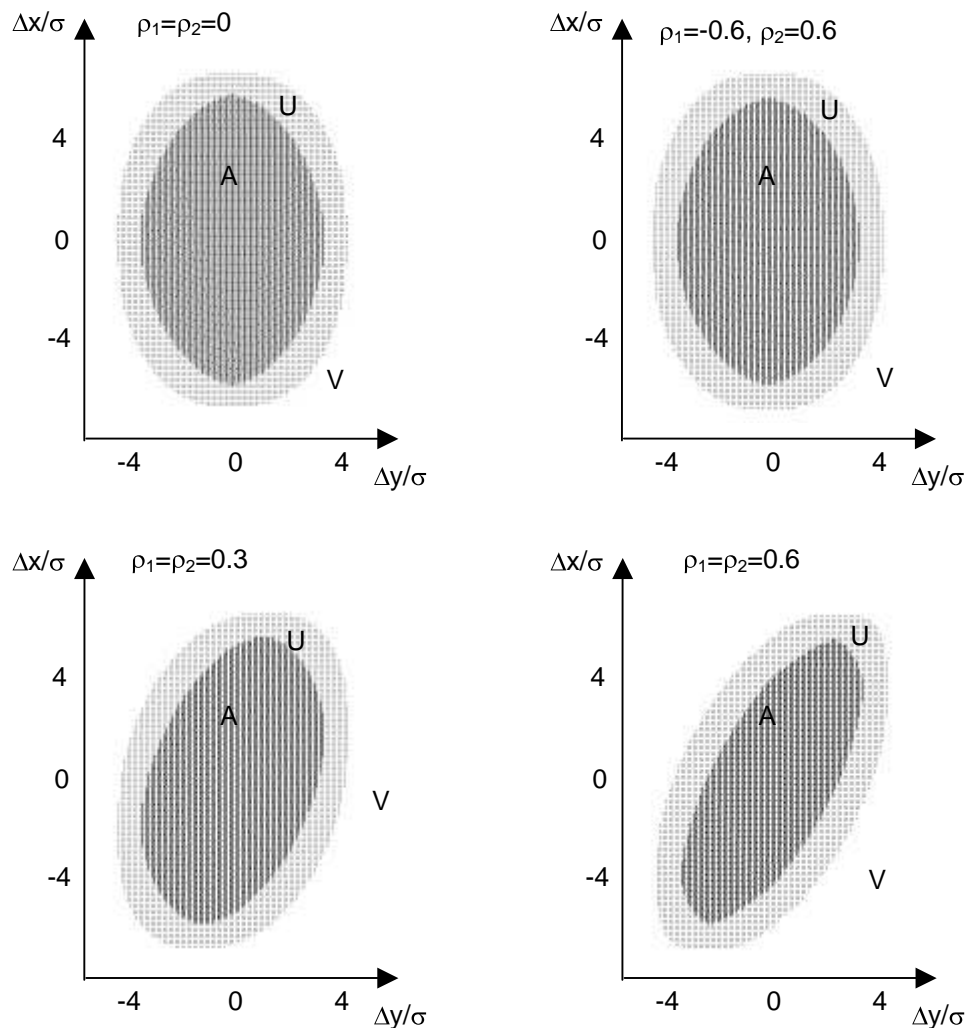


Abb 2: Annahme-, Unentscheidbarkeits- und Verwerfungsbereiche (A,U,V) im Fall B

Die Größe der Bereiche A,U,V entsprechen etwa denen aus Fall A, wenn auch jetzt in Nord-Süd-Richtung gestreckt und bei sich nicht aufhebenden Korrelationen mit verschwenkten Achsen.

## 6 Fazit

Das Beispiel des Lagepunktvergleiches hat deutlich werden lassen, dass unscharfe Eingangsparameter wie Korrelationen und Standardabweichungen das Ergebnis des Vergleichs verfälschen können. Man kommt zu dem Ergebnis, dass die Qualität bzw. das Bewegungsverhalten der Punkte in vielen Fällen eigentlich unentscheidbar, d.h. unkontrollierbar ist.

Die Frage, wie der Unentscheidbarkeitsbereich zu bewerten ist, kann kontrovers diskutiert werden: Sollen unentscheidbare Punkte als modellfehlerbehaftet verworfen werden, kommt man zu wenigen korrekt bestimmten Punkten, deren Lösungen sehr gut zusammen passen. Das erzeugt den Eindruck sehr hoher Qualität. Werden unentscheidbare Punkte als korrekt bestimmt behandelt, wird man eine hohe Zahl von Modellfehlern nicht eliminieren können. Wie bei sich bewegenden Punkten zu verfahren ist, muss vor dem geokinematischen Hintergrund geklärt werden.

Letztlich muss die Bestrebung dahin gehen, den Unentscheidbarkeitsbereich so klein wie möglich zu machen. Das kann nur dadurch erreicht werden, dass Unschärfen minimiert werden.

Der Zugang der Intervallarithmetik ist relativ einfach und leicht zu implementieren. Für die praktische Anwendung werden dennoch keine Intervalle empfohlen, sondern das Rechnen mit unscharfen Zahlen (Bandemer und Näther 1992, Kutterer 2002), das hier aus Platzgründen nicht dargestellt werden kann.

## **7      Literatur**

Bandemer, H.; Näther, W. (1992): Fuzzy Data Analysis. Kluwer Academic Publishers Dordrecht

Kutterer, H. (2002): Zum Umgang mit Ungewissheit in der Geodäsie - Bausteine für eine neue Fehlertheorie. Deutsche Geodätische Kommission C553, München

Lienhardt, W.; Wieser, A.; Brunner, F.K. (2003): Ausreißerdetektion und erreichbare Genauigkeit bei der Positionsbestimmung in aktiven GPS-Netzen. Allg.Verm.Nachr. 5/2003, pp. 177-182

Niemeier, W. (2002): Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter Berlin New York