Notwendige Vorkenntnisse in Mathematik zum Studienbeginn

Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

Liebe Studieninteressierte,

Sie haben sich dazu entschlossen, an der HTW Dresden ein Studium aufzunehmen. Wie Sie in der Studien- und Prüfungsordnung des von Ihnen gewählten Studiengangs sehen können und bei Ihrer Wahl des Studiengangs sicher auch gewusst haben, spielt die Mathematik in Ihrem Studium eine wichtige Rolle. Das Ziel der Mathematikausbildung besteht darin, die mathematischen Grundlagen für fachspezifische Lehrveranstaltungen bereitzustellen und die mathematische Formulierung von Anwendungsproblemen sowie eine systematische Erarbeitung entsprechender Lösungsansätze zu trainieren. Deshalb liegen die meisten Lehrveranstaltungen "Mathematik" auch in den ersten Semestern Ihres Studiums.

Die erfolgreiche Absolvierung einer Reihe von Lehrgebieten in Ihrem Studium erfordert entsprechende Vorkenntnisse aus Ihrer Schulzeit. Damit Sie selbst testen können, ob Ihr derzeitiger Wissensstand in Mathematik den von uns erwarteten Vorkenntnissen genügt, haben wir für Sie Aufgaben aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik in diesem Aufgabenkatalog zusammengestellt. Die erwarteten Vorkenntnisse für die einzelnen Studiengänge sind durchaus verschieden, da auch die Inhalte der Lehrgebiete "Mathematik" den unterschiedlichen Erfordernissen der einzelnen Studiengänge angepasst sind.

Vor allem Techniken wie Bruch-, Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung müssen Sie sicher beherrschen. Auch Gleichungen bis zu einem gewissen Schwierigkeitsgrad sollten Sie lösen können sowie elementare Funktionen und deren Eigenschaften kennen.
In einigen Studiengängen wird auch erwartet, dass Sie bereits entsprechende Vorkenntnisse aus der Differential- und Integralrechnung sowie der Vektorrechnung besitzen, so dass sofort darauf aufgebaut werden kann. Eine Liste der Kapitel dieses Aufgabenkatalogs, welche für Sie besonders wichtig sind, finden Sie am Ende dieser Einleitung. Wenn Sie zu den Themen der anderen Kapitel ebenfalls schon gute Vorkenntnisse besitzen, dann ist dies natürlich auch vorteilhaft. Ferner sind Grundkenntnisse in Stochastik bzw. Statistik in vielen Studiengängen ebenfalls wünschenswert, aber vorerst nicht Teil dieser Aufgabensammlung.

Wir legen jedem Studieninteressierten nahe, die Aufgaben aus den entsprechenden Kapiteln dieses Heftes zu bearbeiten. Sollten Sie dabei feststellen, dass Sie eine hohe Fehlerquote oder große Wissenslücken haben, empfehlen wir Ihnen den Besuch des vierwöchigen Intensivkurses zur Schulmathematik im September. Bei einem eher mittelmäßigen Abschneiden genügt wahrscheinlich eine eigenständige Auffrischung des Wissens, z.B. unter Nutzung eines Online-Mathematik-Brückenkurses. Schneiden Sie gut bis sehr gut bei den Aufgaben ab - prima - dann brauchen Sie auch keinen Intensivkurs besuchen; Sie würden sich sonst vielleicht langweilen.

Nehmen Sie sich unsere Hinweise zu Herzen. Sie müssen kein Mathe-Genie sein, um erfolgreich studieren zu können, aber wir erwarten ein gewisses Niveau von unseren Studierenden. Sie tun sich selber keinen Gefallen, wenn Sie mit einer "In Mathe war ich nie gut"-Einstellung Ihr Studium beginnen. Das ist vielleicht unter Jugendlichen "cool", aber Sie sind erwachsen und bald ein Studienanfänger.

Die Lehrenden vom Lehrbereich Mathematik

	notwendig:	empfehlenswert:
Agrarwirtschaft	Kapitel 1 – 3, 4.1	Kapitel 4.2, 6, 7.1
Allg. Maschinenbau	Kapitel 1, 2, 3.1, 6	alle anderen
Bauingenieurwesen	Kapitel 1 – 3	Kapitel 4.1 und 5.1
Betriebswirtschaft	Kapitel 1 – 3, 4.1	Kapitel 4.2, 6, 7.1
Chemieingenieurwesen	Kapitel 1, 2, 3.1, 6	alle anderen
Elektrotechnik und Informationstechnik	Kapitel 1 – 4	alle anderen
Fahrzeugtechnik	Kapitel 1 – 3, 4.1, 5.1	Kapitel 4.2, 5.2, 6, 7
Gartenbau	Kapitel 1 – 3, 4.1	Kapitel 4.2, 6, 7.1
Informatik	Kapitel 1 – 4	alle anderen
International Business	Kapitel 1 – 3, 4.1	Kapitel 4.2, 6, 7.1
Medieninformatik	Kapitel 1 – 3, 4.1, 5.1	Kapitel 4.2, 5.2, 6
Produktionstechnik	Kapitel 1 – 4	alle anderen
Vermessung/Geoinformatik, Vermessung/Kartographie	Kapitel 1, 2, 6, Kapitel 3 ohne 3.4	Kapitel 4, 5, 7
Wirtschaftsinformatik	Kapitel 1, 2.1, 2.2, Kapitel 3 ohne 3.4, 3.6	Kapitel 2.3, 3.4, 3.6, 4
Wirtschaftsingenieurwesen	Kapitel 1 – 3	Kapitel 4.1 und 5.1

Aufgaben, die mit (∗) gekennzeichnet sind, haben einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad.

Bei Fragen zu den Aufgaben oder wenn Sie Fehler in den Lösungen bemerkt haben, kontaktieren Sie bitte Frau Dr. Kohl unter *kohl@informatik.htw-dresden.de*.

Inhaltsverzeichnis

1 Arithmetik

1.1 Grundlegende Rechenregeln

Die StudienanfängerInnen sollten

- über grundlegende Vorstellungen von Zahlen und Zahlbereichen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$)verfügen
- überschlägig mit Zahlen rechnen können (1.1)
- Regeln zur Kommaverschiebung anwenden können (1.2, 1.3)
- Proportionalitäten verstehen und diese mit dem Dreisatz o.ä. rechnen können (1.4)
- Vorzeichen- und Klammerregeln beherrschen, ausmultiplizieren und ausklammern können (1.5, 1.6)
- Terme zielgerichtet umformen können mithilfe von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz (1.5, 1.6)
- die binomischen Formeln und die quadratische Ergänzung kennen (1.7 – 1.10)

1.1. Beantworten Sie folgende Fragen ohne TR.

(a) Gegeben seien $a = \frac{13}{17}$ und $b = \frac{169}{289}$. Welche Zahl ist größer?

(b) Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{150}$?

(c) Stimmt die Gleichung $\sqrt{3+4} = \sqrt{3} + \sqrt{4}$?

(d) Liegt $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9?

1.2. Vereinfachen Sie die folgenden Terme ohne TR.

(a) $0,002 \cdot 100$	(b) $\frac{12345}{10^5}$	(c) $300 \cdot 1,5 \cdot 10^{-1}$
(d) $\frac{0,12}{0,4}$	(e) $0,2 \cdot 2300 \cdot \frac{3}{2}$	(f) $\frac{0,75 \cdot 0,006}{0,15}$

1.3. Rechnen Sie jeweils in die vorgegebene Einheit um.

(a) $0,005\,mm$ in m	(b) $\frac{3}{4}\,l$ in cl	(c) $12,5m \cdot 4cm$ in dm^2
(d) $10\,m/s$ in km/h	(e) $1,2\,t \cdot 500\,g$ in kg^2	(f) $2\,kg/m^3$ in g/cm^3

1.4. Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne TR.

(a) 9 Fahrkarten kosten 18€. Wieviel kosten 12 Fahrkarten?

(b) Mit 4 Bussen gleichen Typs kann man 240 Personen befördern. Wieviele Personen passen in 7 Busse?

(c) Ein Autofahrer fährt mit $80\,Km/h$ eine bestimmte Strecke in $30\,min$. Wie lange braucht er für dieselbe Strecke mit $120\,Km/h$?

(d) 3 Bauarbeiter brauchen $2\,h$ um ein Loch auszuheben. Wie lange würden 5 Bauarbeiter dafür benötigen? (Alle Bauarbeiter seien gleich leistungsfähig.)

1.5. Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

(a) $x^2 + 2x[3y - (5x + 3y)] - 9xy$

(b) $c + \{-d - 3 - [-(-4 - b)] - (d - 2) - c\}$

(c) $-8[2x(3x - 4) - 4(6x^2 - 4x + 8)] \cdot \left(\frac{1}{16}\right)$

(d) $(2a - 3b)(-6a + b)$

(e) $a\{c + b(a - c)\} - c\{b(a - 1) + a\} - b\{c - a(b - a)\}$

(f) $-\{2st[(s + t)(s - t) - st] - 2st^3\} + 3st(s^2 - t^2)$

(g) $[6t(-4 + 2t) - 3] \cdot (t - 1) - (-8t^3 - 1)$

1.6. Klammern Sie in den folgenden Termen den größten gemeinsamen Teiler aus.

(a) $12(ac)^2 - 20abc^3$

(b) $8abc - 12a^2b + 36ac^2$

(c) $13ah - 25bh + 2h^2$

(d) $10x^4 - 5x^3 + 115x$

1.7. Lösen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln die folgenden Klammern auf.

(a) $(x + 4)^2$

(b) $(x - 2)(x + 2)$

(c) $(2x - 1)^2$

(d) $(3a + 2b)^2$

1.8. Faktorisieren Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln.

(a) $x^2 - 4x + 4$

(b) $x^2 - 16$

(c) $x^2 + 2xy + y^2$

(d) $9x^2 + 6x + 1$

(e) $16x^2 - 9y^2$

(f) $4a^2 + 20ab + 25b^2$

1.9. Vereinfachen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln.

(a) $(2a + b)^2 + (2a - b)(2a + b)$

(b) $(-a - b)(a - b) + a^2$

(c) $(2a + b)(2a - b) - (b + c)(b - c)$

(d) $(2b - 3a)(3a - 2b) - (2a - b)^2$

1.10. Formen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der quadratischen Ergänzung um.

(a) $x^2 - 4x + 15$

(b) $x^2 + 4x - 5$

(c) $x^2 + 10x + 25$

(d) $x^2 - 5x$

(e) $x^2 + 4x + 20$

(f) $4x^2 + 36x + 32$

1.2 Bruchrechnung

Die StudienanfängerInnen sollten

- wissen, dass Division durch Null verboten ist und damit Aussagen zum Definitionsbereich eines Bruches machen können (1.12, 1.13, 1.15)
- Brüche erweitern und kürzen können (unter Beachtung des Definitionsbereichs) (1.11 – 1.15)
- Brüche addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren können (1.11, 1.12, 1.14, 1.15)

1.11. Bringen Sie die folgenden Terme auf einen Bruch und vereinfachen Sie sie.

(a) $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}-2\frac{1}{3}+3$ (b) $\frac{7}{3}+\frac{1}{4}-\frac{5}{6}$ (c) $7\cdot\frac{3}{5}$

(d) $7\frac{3}{5}$ (e) $\frac{44}{3}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{45}{11}$ (f) $\frac{3}{4}:\frac{1}{5}$

(g) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)$ (h) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)$ (i) $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{18}{5}}$

(j) $\frac{\frac{15}{13}}{5}$ (k) $\frac{40}{\frac{5}{3}}$ (l) $\frac{3}{2\cdot\frac{4}{5}}$

(m) $\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$ (n) $\frac{\frac{3}{7}-\frac{1}{2}}{8\cdot\frac{2}{15}+\frac{1}{3}}$ (o) $\frac{\frac{3}{10}+\frac{9}{25}}{6-\frac{6}{5}}$

1.12. Bringen Sie die folgenden Terme auf einen Bruch und vereinfachen Sie sie. Untersuchen Sie dabei auch, unter welchen Bedingungen die Terme definiert sind.

(a) $\frac{2}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{a}$ (b) $\frac{2}{3x^2}+\frac{5}{6x}-\frac{2}{x^4}$ (c) $\frac{1}{x+2}+2x-3$

(d) $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ (e) $-\frac{abc}{a-b}\cdot\frac{b-a}{(-b)c}\cdot\frac{1}{a}$ (f) $\frac{a^2-b^2}{2a(a+b)}-1$

1.13. **(∗)** Kürzen Sie die folgenden Brüche unter Ausnutzung binomischer Formeln. Überprüfen Sie ferner, ob sich durch das Kürzen der Definitionsbereich verändert.

(a) $\frac{1-2x+x^2}{2x^2-2}$ (b) $\frac{x^2-a^2}{2x(x+a)}$ (c) $\frac{(x^2-1)(6y+9)}{(3x+3)(5x-5)}$

1.14. Bringen Sie die folgenden Terme auf den Hauptnenner und fassen Sie sie zusammen.

(a) $\frac{3-x}{2(x-2)}-3\cdot\frac{\frac{1}{2}x+1}{(x-2)(x+2)}$ (b) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-1}$

1.15. Vereinfachen Sie die folgenden Doppelbrüche so weit wie möglich. Machen Sie ferner Angaben, unter welchen Bedingungen die Doppelbrüche definiert sind.

(a) $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{y}{x-y}}$ (b) $\dfrac{\dfrac{ab}{2a+4}+\dfrac{b}{a+2}}{\dfrac{-a}{b-3}-\dfrac{ab}{3b+9}}$

(c) $\dfrac{\dfrac{3}{x+3}}{x-2}-\dfrac{\dfrac{2x^2+3x-24}{x+4}}{x+3}$ (d) $\dfrac{1}{a+\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

1.3 Prozentrechnung

Die StudienanfängerInnen sollten mit Prozentangaben gut und sicher umgehen können.

1.16. An einem Einführungstest in Mathematik haben 70 Studienanfänger teilgenommen. Davon haben 45 den Test bestanden.

(a) Wie hoch (in %) sind die Erfolgsquote und die Durchfallquote?

(b) Von den 70 Teilnehmern am Test hatten 60 einen Vorkurs absolviert, um ihre Schulkenntnisse aufzufrischen. Unter diesen 60 Teilnehmern sind alle, die den Test bestanden haben. Wie hoch sind Erfolgs- und Durchfallquote unter diesen 60 Teilnehmern?

1.17. (a) Ein Artikel kostet im Geschäft 125 €. Er soll um 10% teurer werden. Wie hoch ist der zukünftige Preis?

(b) Ein Artikel kostet im Geschäft nach einer Preiserhöhung um 10% nun 137,50 €. Um wieviel Prozent war er vorher billiger?

1.18. Ein Kunde kauft einen Artikel zum Preis von 19,99 €, der den normalen Mehrwertsteuersatz von 19% enthält; sowie drei Artikel zum Preis von jeweils 1,95 €, der den ermäßigten Mehrwertsteuersatz von 7% enthält. Wieviel Mehrwertsteuer (in €) hat der Kunde insgesamt für die vier Artikel gezahlt?

1.19. Eine Stunde Personal Training kostet $71,40$ Euro inklusive 19% Mehrwertsteuer.

(a) Wieviel beträgt der Nettopreis (ohne Mehrwertsteuer) pro Stunde?

(b) Kauft man ein 10er Pack (10 Stunden Personal Training), so bekommt man die 11. Stunde umsonst. Wieviel Prozent Rabatt sind das (im Vergleich zum normalen Preis von 11 Stunden)?

1.20. Sie eröffnen bei einer Bank ein Sparkonto mit einem Kapital von 2000 € und einer Laufzeit von 3 Jahren. Der Zins beträgt im 1. Jahr 1%, im 2. 2% und im 3. 2,5%.

(a) Der Zins wird jährlich ausgezahlt, also nicht weiter mitverzinst. Wie hoch ist der Zinsertrag insgesamt nach 3 Jahren?

(b) Der Zins wird nicht ausgezahlt, sondern dem Anfangskapital gutgeschrieben und weiter mitverzinst. Wie hoch ist der Zinsertrag insgesamt nach 3 Jahren?

1.4 Potenz- und Wurzelrechnung

Die StudienanfängerInnen sollten

- Potenzen kennen und über den Definitionsbereich von Potenzen mit nicht-ganzzahligen Exponenten Bescheid wissen (1.21, 1.22)
- mit Potenzen mit negativem Exponenten umgehen können (1.21, 1.22)
- die Potenzgesetze kennen und sie sicher anwenden können (1.23, 1.24)
- Wurzeln kennen und über den Definitionsbereich von Wurzeln Bescheid wissen (1.25)
- wichtige Wurzelgesetze kennen und wissen, wie Wurzeln auf Potenzen zurückgeführt werden können (1.23, 1.25, 1.26)

1.21. Berechnen Sie die folgenden Terme, sofern sie definiert sind.

(a) 2^2 (b) $(-2)^2$ (c) 2^{-2} (d) $(-2)^{-2}$ (e) -2^2

(f) $2^{\frac{1}{2}}$ (g) $(-2)^{\frac{1}{2}}$ (h) $2^{-\frac{1}{2}}$ (i) $-2^{-\frac{1}{2}}$ (j) $(-2)^{-\frac{1}{2}}$

(k) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (l) $\frac{1}{2}^2$ (m) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ (n) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (o) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(p) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ (q) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ (r) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (s) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (t) $\frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}$

1.22. Ordnen Sie (ohne Taschenrechner) die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge. Schreiben Sie dazu vorher alle Zahlen mittels Potenzen zur Basis 2.

$$\sqrt{8}; \quad 0; \quad (-2)^3; \quad (0,5)^{-2,5}; \quad 1; \quad 4; \quad 0,25; \quad 2^{-3,1}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2,5}; \quad 8; \quad 2^{-3}$$

1.23. Geben Sie die folgenden Zahlen exakt und im Falle einer irrationalen Zahl auch als auf 4 Kommastellen gerundete Dezimalzahl an. Vereinfachen Sie dazu die Terme und rechnen Sie danach ggf. mit dem Taschenrechner.

(a) $\sqrt{(-5)^2}$ (b) $\sqrt[4]{(-2)^6}$ (c) $\sqrt{\frac{3}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$

(d) $\dfrac{(6^3)^3(8^4)^2}{12^{12}}$ (e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ (f) $2^{2^3}(4^3 8^2)^{-\frac{1}{4}}$

(g) $\dfrac{9^4 \cdot \sqrt{2^2} \cdot 3^{-3}}{\sqrt[3]{8} \cdot (-18)^2}$ (h) $-2^3 \cdot \dfrac{\sqrt{5^2 - 4^2}}{(-2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

(i) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ (j) $\dfrac{\sqrt[3]{(-2)^2 \cdot 7 - 1}}{\left(\sqrt{7^2 + (-1)^3 + 2^4}\right)^{-\frac{1}{3}}}$

1.24. Vereinfachen Sie die folgenden Terme.

(a) $(2x)^7 + (-x)^7$ (b) $\left(\frac{x^5}{x^{-5}}\right)^{-1}$ (c) $(x^{-3}y^2)^4 x^{2^3}$

(d) $\frac{(2x^2y^3z)^4}{(4x^3y^4z^2)^2}$ (e) $\left(\frac{b^3c^5}{b^{-2}c^3}\right)^4$ (f) $\frac{a^{-2}b^{-2}}{ab^{-3}a^{-2}}$

(g) $\frac{(-3)^n(2x+4)^n}{-6^n}$ (h) $\left(x \cdot (x^{4\cdot 3})^2 + x^{5^2} \cdot x^7\right) \cdot (1 - x^7)$

(i) $\frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ (j) $\frac{a^{5l-m}}{b^{6n-2}} : \frac{a^{4l-m}}{b^{n-3}}$, $(l, m, n \in \mathbb{N})$

1.25. Drücken Sie folgende Terme nur als Potenzen aus und geben Sie jeweils an, für welche x der Term definiert ist.

(a) $\sqrt{3x+1}$ (b) $(\sqrt[3]{x})^4$ (c) $\frac{1}{(\sqrt[7]{x^2+4x})^2}$

1.26. Vereinfachen Sie die folgenden Terme. Geben Sie jeweils Bedingungen an, wann die Terme definiert sind.

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4y^2} + \sqrt{(-1)^2}$ (b) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x^{-1} \cdot \sqrt[5]{x^2}}$

(c) $\frac{\sqrt{2x^5+5x^3}}{x}$ (d) $\sqrt[3]{x^3 \cdot \sqrt{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^8 \cdot \sqrt[4]{x^3}}}}$

(e) $\left(\sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y}\right)^2$ (f) $2p - (\sqrt{p+q} - \sqrt{p-q})^2$

1.5 Logarithmenrechnung

Die StudienanfängerInnen sollten

- Logarithmen kennen und über deren Definitionsbereich Bescheid wissen (1.32)
- speziell den natürlichen und den dekadischen Logarithmus kennen
- einfache Logarithmen (bzw. Numeri oder Basen) bestimmen können (1.27 – 1.30)
- (Logarithmengesetze kennen) (1.31, 1.32)

1.27. Berechnen Sie die folgenden Logarithmen.

(a) $\log_5(25)$ (b) $\log_2(32)$ (c) $\lg(1000)$

(d) $\log_7(1)$ (e) $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ (f) $\ln(e^{-1})$

(g) $\log_{0,1}(10)$ (h) $\log_{16}(4)$ (i) $\ln(\sqrt{e})$

1.28. Berechnen Sie zu den folgenden Logarithmen jeweils den Numerus z.

(a) $\log_7(z) = 2$ (b) $\lg(z) = -5$ (c) $\ln(z) = 0$

(d) $\log_2(z) = -6$ (e) $\log_{64}(z) = -\frac{1}{3}$ (f) $\log_5(z) = \frac{5}{2}$

1.29. Berechnen Sie zu den folgenden Logarithmen jeweils die Basis b.

(a) $\log_b(125) = 3$	(b) $\log_b(100) = 2$	(c) $\log_b(128) = 7$
(d) $\log_b(81) = -4$	(e) $\log_b\left(\frac{1}{27}\right) = -3$	(f) $\log_b(\sqrt{e}) = 0,5$
(g) $\log_b(2) = \frac{1}{4}$	(h) $\log_b\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$	(i) $\log_b(-1) = 2$

1.30. Berechnen Sie die folgenden Terme sofern möglich ohne Taschenrechner.

(a) $\log_6(6^a)$	(b) $\ln(e^3) - 1$	(c) $\ln(e^3 - 1)$
(d) $\ln(e^9) + \ln(e^{-2})$	(e) $\lg(4) - \lg(8) + \lg(2)$	(f) $\ln(\ln(\ln(e^e)))$

(∗) $2\log_4(8) + \log_3(\log_2(64)) - \log_3(18)$

1.31. **(∗)** Berechnen Sie die folgenden Terme ohne Taschenrechner.
Nutzen Sie dazu Potenz-, Wurzel- und/oder Logarithmengesetze.

(a) $\sqrt{4e^{2\ln(5)}}$ (b) $2e^{2\ln(2)}$ (c) $\sqrt{e^{2+\ln(9)}}$ (d) $\left((\sqrt[3]{e})^2\right)^{\ln(8)}$

1.32. Fassen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Logarithmengesetze so weit wie möglich zusammen. Geben Sie ferner Bedingungen an, wann die Terme definiert sind

(a) $\ln(2a) + 2\ln(b) - 2\ln(2c)$

(b) $\frac{1}{3}\log_a(x) - \frac{1}{9}\log_a(x^3) + 2\log_a(x) - \frac{1}{4}\log_a(x^4)$

(c) $\ln\left((a-b)^2\right) - 2\ln(a-b) + \ln(1)$

(d) $\frac{1}{3}\ln(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}\ln(x-y) - \frac{1}{2}\ln(x+y)$

1.6 Formelumstellung

Die StudienanfängerInnen sollten Formeln, die mehrere Variablen enthalten, nach einer Variablen umstellen können.

1.33. Lösen Sie die folgenden Formeln jeweils nach den gegebenen Größen auf.

(a) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ nach $R,\ R_1,\ R_2$

(b) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} - \dfrac{d}{f_1 f_2}$ nach $f,\ f_1,\ f_2$

(c) $I = \dfrac{nU}{nR_i + R_a}$ nach $n,\ R_i,\ R_a$

(d) $X = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ nach $L,\ C,\ (*)\ \omega$

(e) $T = T_U + c \cdot e^{-kt}$ nach $c,\ k$

(f) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$ nach $C,\ R,\ (*)\ L$

(g) $K = K_0 q^n + R\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ nach $K_0,\ R,\ (*)\ n$

2 Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Gleichungen mit einer Unbekannten

Die StudienanfängerInnen sollten

- ein grobes Verständnis von (nicht-)äquivalenten Umformungen haben (2.1)
- lineare und quadratische Gleichungen lösen können (2.2, 2.3, 2.4)
- einfache Polynomgleichungen z.B. durch Ausklammern oder Substitution lösen können (2.5, 2.6)
- einfache Bruchgleichungen lösen können (2.7)
- einfache Betragsgleichungen graphisch und/oder über Fallunterscheidungen lösen können (2.8)
- einfache Exponential- und Logarithmengleichungen lösen können (2.9, 2.10, 2.11)

2.1. Im folgenden sind vier Rechnungen bzw. Beweise gegeben. Schreiben Sie von Zeile zu Zeile dazu, welche Umformung vorgenommen wurde und ob es sich dabei um eine äquivalente Umformung (d.h. eine Umformung die nicht die Lösungsmenge der Gleichung verändert) handelt. Begründen Sie ferner, wo Fehler oder Ungenauigkeiten in der Rechnung auftreten.

<table>
<tr>
<td>

(a) Gegeben ist $a = b$.

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a+b)(a-b) &= b(a-b) \\ (a+b) &= b \\ a+a &= a \\ 2a &= a \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus der Rechnung folgt, dass $2 = 1$ gilt.

</td>
<td>

(b) Gegeben ist $\sqrt{2x^2-1} + x = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2-1} + x &= 0 \\ \sqrt{2x^2-1} &= -x \\ (\sqrt{2x^2-1})^2 &= (-x)^2 \\ 2x^2 - 1 &= x^2 \\ x^2 &= 1 \\ |x| &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Folglich sind 1 und -1 Lösungen der Gleichung $\sqrt{2x^2-1} + x = 0$.

</td>
</tr>
</table>

(c) Gegeben sind $x = 3$ und $y = 4$. Daraus folgt $x + y = 7$. $$\begin{aligned} x+y &= 7 \\ (x+y)(x-y) &= 7(x-y) \\ x^2-y^2 &= 7x-7y \\ x^2-7x &= -7y+y^2 \\ x^2-7x+\tfrac{49}{4} &= y^2-7y+\tfrac{49}{4} \\ \left(x-\tfrac{7}{2}\right)^2 &= \left(y-\tfrac{7}{2}\right)^2 \\ x-\tfrac{7}{2} &= y-\tfrac{7}{2} \\ x &= y \\ 3 &= 4 \end{aligned}$$ Aus der Rechnung folgt, dass $3 = 4$ gilt.	(d) Gegeben ist $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5$. $$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^x &= \left(\frac{4}{3}\right)^5 \\ \frac{3^x}{4^x} &= \frac{4^5}{3^5} \\ 3^x\cdot 3^5 &= 4^x\cdot 4^5 \\ 3^{x+5} &= 4^{x+5} \\ \ln\left(3^{x+5}\right) &= \ln\left(4^{x+5}\right) \\ (x+5)\cdot\ln(3) &= (x+5)\cdot\ln(4) \\ \ln(3) &= \ln(4) \\ 3 &= 4 \end{aligned}$$ Aus der Rechnung folgt, dass $3 = 4$ gilt.

2.2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

(a) $2x - \frac{2}{3} = 0$
(b) $3x - 3 = 7 - 2x$
(c) $2(x-3) = 3(2-2x)$
(d) $3(x+2) = 5(9-2x)$
(e) $2x - (5-4x) = 3x - (2x+8)$
(f) $(5-x)(3+x) = (x-2)(8-x)$
(g) $\frac{2x-1}{2} + \frac{3x+2}{4} + \frac{5x+3}{8} + \frac{1}{4} = 1 - \frac{7x+3}{8}$
(h) $a(2x-1) + b = 2x - a - b$

2.3. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen ohne $p, q-$Formel (Lösungsformel).

(a) $5x^2 = 0$
(b) $2x^2 + 6x = 0$
(c) $3x^2 - 9 = 0$
(d) $2x^2 + 8 = 0$
(e) $3x^2 + 2x + 1 = 3(5 - x + x^2)$
(f) $3x^2 + x + 9 = 13x - 3$

2.4. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

(a) $x^2 + 4x + 13 = 0$
(b) $5x^2 - 25x + 30 = 0$
(c) $5x^2 + 60x + 175 = 0$
(d) $9x^2 - 18x + 9 = 0$
(e) $2x^2 - 8x = 2x - 12$
(f) $3x^2 - 36x + 150 = 0$
(g) $5x^2 + 2x - 2 = x - 1 - x^2$
(h) $24x^2 + 13 = 70x - x^2$

2.5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

(a) $(x^2 - 4x - 5)(x - 3) = 0$
(b) $x^3 - 4x = 0$
(c) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$
(d) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
(e) $5x^6 - 20x^4 = 0$
(f) $(x+1)(x-\sqrt{2})(x^2+4) = 0$

2.6. **(∗)** Lösen Sie die folgenden biquadratischen Gleichungen.

(a) $x^4 - 9x^2 = 0$ (b) $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$
(c) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ (d) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

2.7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen.

(a) $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{x-3}{x-5}$ (b) $\dfrac{x}{x^2-4} = 1$
(c) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x}{x^2-1} = 0$ (d) $\dfrac{x+2}{2x-1} = \dfrac{4x-1}{x}$
(∗) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{5}{2(x+1)}$ (∗) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x-1}{x} = 1$

2.8. Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen graphisch und/oder rechnerisch.

(a) $|x| = 2$ (b) $|x+2| - 3 = 0$ (c) $-|4x+1| = 3$
(d) $|5x - 10| = 5$ (e) $|2x + 7| = 7$ (f) $2 + |x| = x$

2.9. Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen und geben Sie die Lösungen exakt und im Falle einer irrationalen Zahl als Dezimalzahl auf 4 Kommastellen gerundet an.

(a) $2^{6x-2} = 4^{2x+3}$ (b) $10^{2x+1} = 2^x \cdot 5^{2x}$ (c) $1 = e^{2x+3}$
(d) $3 - e^{10-x} = 0$ (e) $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{1}{8}$ (f) $e^{3x+1} - e^{-x} = 0$
(g) $(e^x - 1)^2 = 0$ (∗) $(e^x)^2 - 5e^x - 6 = 0$ (∗) $e^x + e^{-x} = 2$

2.10. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf.

(a) $3^x = 9$ (b) $10^x = 0,001$ (c) $\ln(xe) = 5$
(d) $\log_2(x) = 5$ (e) $\log_x(16) = -4$ (f) $\ln(e^{x+2}) = 2$

2.11. **(∗)** Lösen Sie die folgenden logarithmischen Gleichungen und geben Sie die Lösungen exakt und im Falle einer irrationalen Zahl als Dezimalzahl auf 4 Kommastellen gerundet an.

(a) $\ln(x+1) = 2$ (b) $\lg(x+1) = 2$ (c) $\ln(x^2 + \frac{8}{3}x) = 0$
(d) $\ln(x^2 + 2x + 3) = \ln(2)$ (e) $\ln(x) = \ln\big((x+1)^2\big)$ (f) $(x+1)(\ln x + 1) = 0$

2.2 Ungleichungen mit einer Unbekannten

Die StudienanfängerInnen sollten

- Besonderheiten bei Ungleichungen wie z.B. beim Multiplizieren mit negativen Zahlen kennen
- lineare und quadratische Ungleichungen lösen können (2.12, 2.13)

- einfache Betragsungleichungen graphisch und/oder über Fallunterscheidungen lösen können (2.14)

2.12. Lösen Sie die folgenden linearen Ungleichungen.

(a) $2x - 3 < 5x$ (b) $5x - 60 \leq 3x$

(c) $x - 2 \geq 2x - \frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{3}x - 4 \leq \frac{1}{5}x$

(e) $(2 - x)(1 + x) \geq (3 - x)(4 + x)$ (f) $ax < x + a$, $a \in \mathbb{R}$

2.13. Lösen Sie die folgenden quadratischen Ungleichungen.

(a) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ (b) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ (c) $x^2 + 4x + 13 > 0$

(d) $x^2 + 4x + 13 \leq 0$ (e) $x^2 - 5x > 0$ (f) $16x^2 + 8x < 35$

2.14. Lösen Sie die folgenden Betrags-Ungleichungen.

(a) $|x| < 2$ (b) $|x - 3| \leq 4$ (c) $|x + 1| > 2$

(d) $2|x - \frac{3}{2}| < 5$ (e) $|x - 5| \geq x$ (f) $|2x - 4| < 2 - x$

2.3 (Lineare) Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

Die StudienanfängerInnen sollten

- den Unterschied zwischen linearen und nicht-linearen Gleichungssystemen kennen (2.15)
- einfache nicht-lineare Gleichungssysteme mit Einsetzungs- bzw. Gleichsetzungsverfahren lösen können (2.15)
- lineare Gleichungssysteme mit Einsetzungs-, Gleichsetzungs-, Additions- bzw. Subtraktionsverfahren lösen können (2.15, 2.16)
- aus Textaufgaben selbstständig ein geeignetes Gleichungssystem aufstellen und dieses anschließend lösen können (2.17)

2.15. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit dem Einsetzungs- oder Gleichsetzungsverfahren. Geben Sie ferner an, welche der Gleichungssysteme linear sind.

(a) $\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & = & 10 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 35 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcr} 2a & + & 3b & = & 7 \\ 2a & + & 2b & = & 12 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y^2 & = & 16 \\ x & + & y & = & 20 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcr} x & - & y^2 & = & 7 \\ x & - & 2y^2 & = & 3 \end{array}$

2.16. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme mit dem Additions- oder Subtraktionsverfahren.

(a) $$\begin{array}{rcrcr} 4x & - & 4y & = & -16 \\ 5x & + & 2y & = & 1 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 5y & = & 9 \\ 2x & + & 6y & = & -8 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} 7x & + & 2y & = & -15 \\ -21x & + & 6y & = & 39 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcr} \frac{1}{5}x_1 & - & \frac{1}{4}x_2 & = & 1 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & = & -3 \end{array}$$

2.17. Stellen Sie für die folgenden Probleme jeweils ein geeignetes Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

(a) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 8, die Differenz ihrer Quadrate 96. Wie lauten die beiden Zahlen?

(b) Vor zwei Jahren war ein Vater dreimal so alt wie sein Sohn. In 15 Jahren wird er nur noch doppelt so alt sein. Wie alt sind gegenwärtig Vater und Sohn?

(c) Ein Landwirt will innerhalb seines Grundstücks eine rechteckige Fläche von $2275\,m^2$ einzäunen. Er hat dafür genau $200\,m$ Drahtzaun zur Verfügung, der aufgebraucht werden soll. Welche Abmessungen müsste die rechteckige Fläche haben?

(d) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die kleinere Kathete $13\,cm$ kürzer als die andere. Wenn man die erstgenannte um $14\,cm$ verkürzt und die andere um $8\,cm$ verlängert, so erhält man ein neues rechtwinkliges Dreieck, das dieselbe Hypotenusenlänge wie das ursprüngliche Dreieck besitzt. Wie lang sind die Seiten des neuen Dreiecks?

(e) Zwei Autos fahren auf zwei senkrecht zueinander verlaufenden Straßen in Richtung Kreuzung. Die Geschwindigkeit des ersten Autos beträgt 8 m/s, die des zweiten 6 m/s. Nach 5 s haben die Autos eine gegenseitige Entfernung von 45 m. Welche Entfernung hatten die Autos ursprünglich von der Kreuzung, wenn ihr das zweite Auto 1 m näher war als das erste?

3 Funktionen

Die StudienanfängerInnen sollten

- den Funktionsbegriff sowie den Definitions- und Wertebereich kennen (3.23 – 3.25)
- Begriffe wie Graph, Nullstellen, Symmetrie, Periodizität (3.19), Extrem- und Wendestellen (-punkte), Monotonie- und Krümmungsverhalten kennen (siehe auch Kapitel 4.2)
- eine grobe Vorstellung von Asymptoten und dem Verhalten im Unendlichen haben (3.12, 3.13, 3.26)
- eine Kurvendiskussion (v.a. Definitionsbereich, Schnittpunkt mit der $y-$Achse, Nullstellen, Extrempunkte, Monotonieintervalle, Wendepunkte, (Krümmungsintervalle), (Verhalten im Unendlichen bzw. an den Grenzen des Defintionsbereiches), Skizze des Graphen, Wertebereich) für wenigstens folgende Funktionen $y = f(x)$ durchführen können:
  - einfache ganzrationale Funktionen (Polynome) (3.8), insbesondere lineare (3.1 – 3.3) und quadratische Funktionen (3.4 – 3.7)
  - einfache Wurzelfunktionen, z.B. $f(x) = \sqrt{x}$ (3.9)
  - einfache gebrochen-rationale Funktionen (3.15, 3.16)
- folgende spezielle Funktionen $y = f(x)$ und deren Eigenschaften kennen:
  $f(x) = e^x, \quad f(x) = \ln(x), \quad f(x) = \sin(x), \quad f(x) = \cos(x), \quad \big(f(x) = \tan(x)\big)$
- Wertetabellen und Graphen auch für nicht-elementare Funktionen erzeugen können (3.12)
- aus gegebenen Informationen einen Funktionsterm mit vorgegebenem Typ bestimmen können (3.7, 3.13, 3.14)
- bei Funktionen, die aus elementaren Funktionen durch Transformation (z.B. Verschiebung auf der $x-$ und/oder $y-$Achse, Spiegelung an den Koordinatenachsen, Streckung/Stauchung) hervorgegangen sind, die entsprechende Transformation erkennen und damit den Graphen ohne grafikfähigen TR skizzieren können (3.4, 3.5, 3.8, 3.10, 3.15, 3.21, 3.22)

3.1 Lineare und quadratische Funktionen

3.1. Geben Sie die lineare Funktion an, deren Graph durch die Punkte $A(1, 1)$ und $B(-2, 3)$ verläuft. In welchem Punkt schneidet der Graph die x-Achse?

3.2. Der Graph der linearen Funktion f schneidet die $x-$Achse bei $x = 4$ und die $y-$Achse bei $y = -5$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für f.

3.3. Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = 2x - 5,\ f_2(x) = -2x - 5,\ f_3(x) = 2x + 3$ und $f_4(x) = -2x + 3$.

(a) Beschreiben Sie die Lage der Graphen der vier Funktionen zueinander (Parallelität, Schnittpunkte, Symmetrie zur y-Achse).

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_1(x)$ und $f_4(x)$ sowie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen $f_2(x)$ und $f_3(x)$.

(c) Zeichnen Sie die Graphen der vier Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

3.4. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen ohne TR. Geben Sie an, welche Transformationen (a) $\to$ (b) $\to$ (c) $\to$ (d) $\to$ (e) stattfinden, die letztendlich den Graphen von (a) in den von (e) überführen.

(a) $y = x^2$	(b) $y = 2x^2$	(c) $y = -2x^2$
(d) $y = -2(x-3)^2$	(e) $y = -2(x-3)^2 + 1$	

3.5. Gegeben ist die quadratische Funktion $y = f(x)$ in der Scheitelpunktsform $y = a(x-d)^2 + e$ mit $a, d, e \in \mathbb{R}$. Geben Sie den Scheitelpunkt S an. Welche Bedingung muss jeweils gelten, damit der Graph von f (im Vergleich zur Normalparabel)

- gestreckt
- gestaucht
- nach oben geöffnet
- nach unten geöffnet ist?

3.6. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 8x + 17,\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ und $h(x) = -3x^2 + 2x + 1$. Bestimmen Sie jeweils:

(a) die Scheitelpunktsform und den Scheitelpunkt

(b) die Nullstellen

(c) den Schnittpunkt mit der y-Achse

(d) die Monotonieintervalle

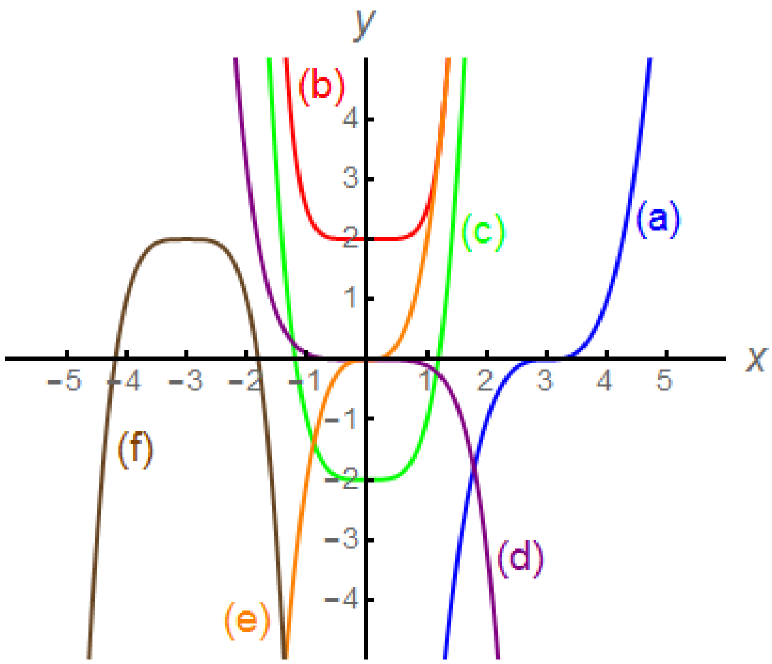
(e) den Wertebereich der Funktion

(f) eine Skizze des Graphen

3.7. Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestimmen Sie a, b, c so, dass der Graph von f die Nullstellen $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ hat und durch den Punkt $P(1, 2)$ verläuft.

3.2 Potenz- und Wurzelfunktionen etc.

3.8. Gegeben sind die Graphen von 6 Funktionen:



Ordnen Sie die Graphen den zugehörigen Funktionen $f_1, \dots, f_6$ zu.

$f_1(x) = 2x^3$	$f_2(x) = (x-3)^3$	$f_3(x) = x^4 - 2$
$f_4(x) = 2 - (x+3)^4$	$f_5(x) = -\frac{1}{10}x^5$	$f_6(x) = \frac{1}{2}x^6 + 2$

3.9. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen ohne TR und geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x+3}$ (c) $y = \sqrt{-2x}$

3.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen etc.

3.10. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen für jeweils eine Teilaufgabe in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

(a) $y = e^{ax}$ für $a = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $y = e^x + a$ für $a = 0, \pm 1, \pm 2, \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $y = e^{x+a}$ für $a = 0, \pm 1, \pm 2, \quad x \in \mathbb{R}$

3.11. Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion für den größtmöglichen Definitionsbereich.

(a) $f(x) = \ln(x) + 2$ (b) $f(x) = \ln(x-2)$ (c) $f(x) = \ln(|x|)$

3.12. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (1-x)e^{2-x}$.

(a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

(b) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $0 \leq x \leq 5$.

(c) Wie verhält sich f für $t \to \pm\infty$?

3.13. Eine Tasse Tee kühlt ab. Zu Beginn beträgt die Temperatur $90°C$. Nach 10 min beträgt die Temperatur nur noch $66°C$. Die Umgebungstemperatur T_U ist $20°C$.

(a) Stellen Sie die Abkühlungsfunktion $T(t) = T_U + c \cdot e^{-kt}$ auf. Bestimmen Sie dazu c und k.

(b) Wie heiß ist der Tee nach 20 min?

(c) Wann ist der Tee auf $40°C$ abgekühlt?

(d) Wie verhält sich $T(t)$ für $t \to \infty$?

3.14. Von dem radioaktiven Element Actinium 275 zerfallen täglich $6,7\%$ der jeweils vorhandenen Menge. In einem Labor wird eine Menge von 1000mg Actinium eingesetzt.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Bestandsfunktion $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$. Dabei bezeichne N_0 den Anfangsbestand und $N(t)$ die Menge an Actinium nach t Tagen.

(b) Berechnen Sie, in welcher Zeitspanne sich die Menge halbiert (Halbwertszeit).

3.4 Gebrochen-rationale Funktionen

3.15. Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion für den größtmöglichen Definitionsbereich. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion an. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$? Geben Sie ggf. die Asymptoten an.

(a) $y = \dfrac{1}{x}$ (b) $y = \dfrac{1}{x-2}$ (c) $y = \dfrac{2}{x-2}$

(d) $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$ (e) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ (f) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

3.16. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich und die Nullstellen. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen (über Wertetabelle oder mit TR) und machen Sie Aussagen dazu, wie die Funktion sich in der Nähe der Nullstellen des Nenners verhält. Wie verhält sich die Funktion für $x \to \pm\infty$? Geben Sie ggf. die Asymptoten an.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{x^3-4x}$ (b) $g(x) = \dfrac{6-2x^2}{x^2+x-6}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2+6x+10}{x+4}$

3.5 Trigonometrische Funktionen

3.17. (a) Rechnen Sie $30°,\ 120°,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{2}$ von Grad in Radiant bzw. umgekehrt um.

(b) Berechnen Sie $\sin(30°),\ \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right),\ \cos(90°),\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

3.18. Ermitteln Sie alle reellen Lösungen $x \in (-\pi, \pi]$ der folgenden trigonometrischen Grundgleichungen jeweils für $y = \frac{1}{2},\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bzw. für $z = 1,\ z = \sqrt{3}$.
Geben Sie die Lösungen sowohl im Grad- als auch im Bogenmaß an.

(a) $\sin(x) = y$ (b) $\cos(x) = y$ (c) $\tan(x) = z$

3.19. Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = |\sin(x)| \qquad f_2(x) = \sin(2x) \qquad f_3(x) = \cos(x + \tfrac{\pi}{2}).$$

Geben Sie für jede der Funktionen die Periodenlänge und die Nullstellen an und prüfen Sie, welche Symmetrie (Achsen- bzw. Punktsymmetrie) vorliegt.

3.20. Wie lauten die Werte für $\sin(k\pi)$ und $\cos(k\pi)$, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist?

3.21. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen ohne TR.
Geben Sie an, welche Transformationen (a) → (b) → (c) → (d) → (e) stattfinden, die letztendlich den Graphen von (a) in den von (e) überführen.

(a) $y = \sin(x)$ (b) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (c) $y = \sin\left(2(x - \frac{\pi}{3})\right)$
(d) $y = 3\sin\left(2(x - \frac{\pi}{3})\right)$ (e) $y = 3\sin\left(2(x - \frac{\pi}{3})\right) - 4$

3.22. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a, b > 0$. Was bewirken die vier Parameter a, b, c, d im Vergleich zur gewöhnlichen Sinusfunktion $y = \sin(x)$? Ordnen Sie zu:

- Verschiebung auf der $x-$Achse
- Verschiebung auf der $y-$Achse
- Veränderung der Amplitude
- Veränderung der Periodenlänge

3.6 Vermischtes

3.23. Gegeben sei eine reellwertige Funktion $y = f(x)$ einer reellen Variablen mit dem Definitionsbereich D und dem Wertebereich W, d.h. $f : D \to W$.
Welche der folgenden Aussagen sind immer zutreffend? Geben Sie für diejenigen Aussagen, die nicht immer zutreffen, ein Gegenbeispiel an.

(a) D ist die Menge der reellen Zahlen.

(b) W ist eine Teilmenge der reellen Zahlen.

(c) f ordnet jedem x aus D genau ein y aus W zu.

(d) f ordnet jedem y aus W genau ein x aus D zu.

(e) Zwei verschiedene Argumente x_1 und x_2 aus D müssen auch zwei verschiedene Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ haben.

(f) Für jedes y aus W muss es mindestens ein x aus D mit $y = f(x)$ geben.

(g) W kann mehr Elemente (Zahlen) enthalten als D.

(h) Es gibt eine Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$ mit $x = f^{-1}(y)$, die jedem Funktionswert $y = f(x)$ wieder sein zugehöriges Argument x zuordnet.

3.24. Für welche x sind die folgenden Terme definiert? Ermitteln Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich.

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ (b) $f(x) = \dfrac{2}{\ln(x+5)}$

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(x+4)}{(x-1)(x+2)}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-0,1x}}$

3.25. Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen evtl. vorhandene Maxima und Minima (Art, Lage, Funktionswert) ohne Differentialrechnung. Geben Sie ferner jeweils den Wertebereich an.

(a) $f(x) = x^2 - 5$ (b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ (c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = \sin^2(x)$ (e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

3.26. Wie verhalten sich die folgenden Funktionen für $x \to \pm\infty$? Nähert sich der Graph der Funktion $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ einer Geraden an? Wenn ja, welcher?

(a) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 4$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ (c) $f(x) = \dfrac{3x}{x - 7}$

(d) $2x - 3 + \dfrac{5}{x - 1}$ (e) $f(x) = e^{-x^2}$ (f) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$

4 Differentialrechnung

4.1 Ableitungsfunktionen, Ableitungsregeln

Die StudienanfängerInnen sollten

- die Ableitungsfunktionen elementarer Funktionen kennen (4.1)
- die Summen-, Faktor-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel kennen und diese sowie einfache Kombinationen davon anwenden können (4.2 – 4.4)
- den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion erläutern können (4.5)
- aus dem Graphen einer Funktion den qualitativen Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion bestimmen können und umgekehrt (4.6, 4.7)

4.1. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Ableitung $f'(x)$ an:

(a) $f(x) = \sin(x)$ (b) $f(x) = \cos(x)$ (c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$ (e) $f(x) = \ln(x)$

4.2. Bestimmen Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ (b) $y(x) = \sin(x) + 3e^x - x^3$

(c) $f(u) = \sqrt{u} + \frac{u^2+1}{3u}$ (d) $f(x) = (3+x)^2 + x^{-2} - 3x^{-4}$

(e) $v(t) = t^{3/2} + \frac{1}{\sqrt[4]{t^7}} + 3a,\ a$ konst (f) $f(x) = \frac{1}{x} + \cos(x)$

4.3. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe von Ableitungsregeln.

(a) $f(x) = 2xe^x$ (b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + x}$

(c) $a(t) = t^2\sin(t) + 2t\cos(t)$ (d) $f(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^5 + 1}$

(e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ (f) $f(s) = (s^2+1)^{40}$

(g) $f(x) = \ln(2x+3) + e^{-3x^2}$ (h) $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

(i) $f(x) = -x^2 e^{4\sqrt{x}}$ (j) $f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^3)$

4.4. Bestimmen Sie die 10. Ableitung $f^{(10)}(x)$ von $f(x) = x^{10} + e^{2x}$.

4.5. Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Besitzt f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2) = 1$.

(b) Hat f' auf dem Intervall $[1, 2]$ ein positives Vorzeichen, so ist f in diesem Intervall monoton steigend.

(c) Gilt $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1, f(1))$ den Anstieg 2.

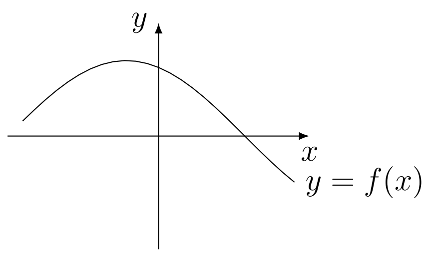
(d) Gilt $f'(2) = 0$, so hat f bei $x = 2$ eine lokale Extremstelle.

(e) Hat f bei $x = 1$ eine Wendestelle, so hat f' bei $x = 1$ eine lokale Extremstelle.

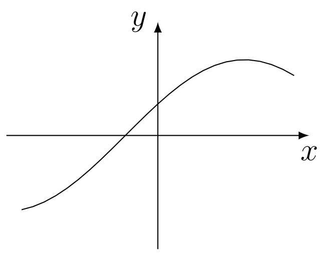
(f) Gilt $f'(0) = f''(0) = 0$, so hat f bei $P(0, f(0))$ einen Sattelpunkt (Horizontalwendepunkt).

(g) Ist $f'(3) = 0$ und es findet bei $x = 3$ ein Vorzeichenwechsel bei der 1. Ableitung von $-$ zu $+$ statt, so ist $x = 3$ eine lokale Minimalstelle von f.

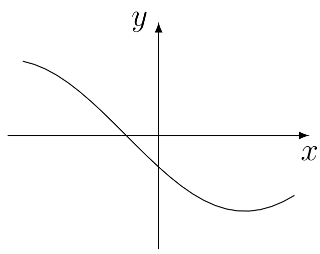
4.6. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f.



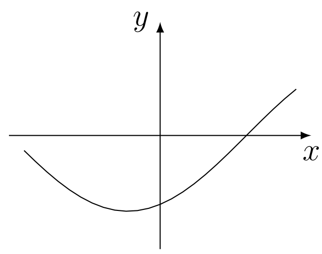
Welcher der drei folgenden Funktionsgraphen stellt ihre Ableitung dar?



(a)

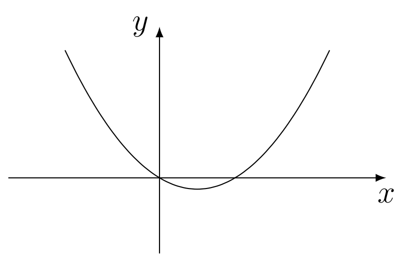


(b)

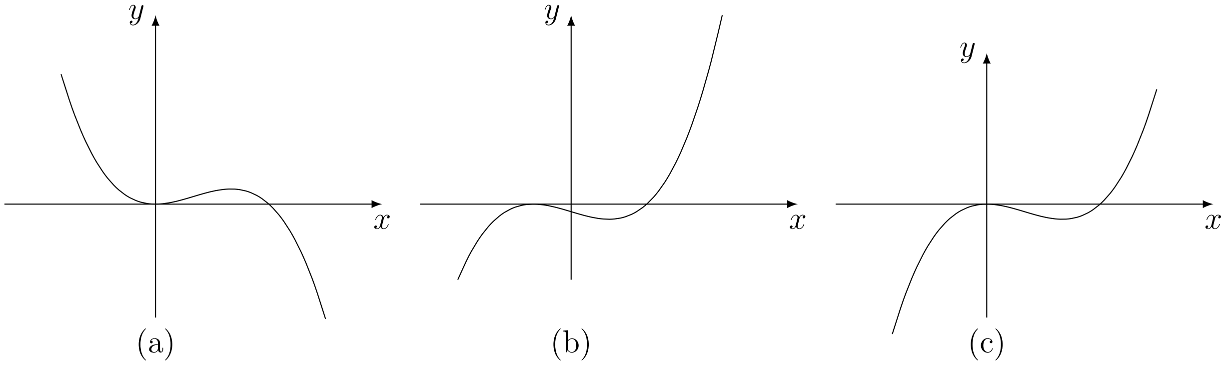


(c)

4.7. Das Bild zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



Welcher der drei folgenden Funktionsgraphen stellt eine mögliche Funktion f dar?



4.2 Anwendung der Differentialrechnung

Die StudienanfängerInnen sollten

- die Ableitung an einer Stelle als Steigung der Kurve und als Anstieg der Tangente an dieser Stelle verstehen (4.8, 4.9)
- die Ableitung an einer Stelle als momentane Änderungsrate verstehen (4.10, 4.11)
- die Differentialrechnung zur Bestimmung von Eigenschaften von Funktionen (v.a. Monotonieverhalten und Extremstellen) nutzen können (4.12, 4.13, 4.14)
- mit Hilfe der Differentialrechnung Extremalprobleme lösen können (4.16 – 4.18)

4.8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 2$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(2, f(2))$.

4.9. In einer Eishalle befindet sich eine Rodelbahn, deren Abfahrtsprofil durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{1200}x^2 + \frac{1}{6}x$ beschrieben werden kann. Die Rodelbahn hat ihren Startpunkt bei $A(120, f(120))$ und führt bis zum Punkt B, wo sie horizontal ausläuft. Wo liegt dieser Punkt B und welcher Höhenunterschied wurde bei einer Abfahrt durchfahren?

4.10. Die Abkühlungsfunktion für Tee sei $T(t) = 20 + 70e^{-0{,}042t}$ ($T(t)$ in Grad, t in Minuten). Wie groß ist die Abkühlungsrate (Grad pro Minute) zu den Zeiten $t = 3$ min und $t = 15$ min?

4.11. Die Höhe eines Flugzeuges beim Landeanflug wird durch die Funktion $h(t) = 40t^2 - 400t + 1000$ ($h(t)$ in Metern, t in Minuten) beschrieben. Der Landeanflug beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$. Wie groß ist die momentane Sinkgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ min?

4.12. Nach der Einnahme einer Schmerztablette steigt die Konzentration c des Wirkstoffs im Blut zunächst auf ein Maximum an und wird dann wieder abgebaut. Der Prozess kann bis zu einem gewissen Zeitpunkt durch die Funktion $c(t) = t^3 - 17t^2 + 63t + 81$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Stunden seit der Einnahme und $c(t)$ die Konzentration des Wirkstoffs in $\mu g/ml$ nach t Stunden ist.

(a) Wie hoch ist die Konzentration zur Zeit der Einnahme?

(b) Zeigen Sie, dass das Medikament nach 9 Stunden gänzlich abgebaut ist.

(c) Wann ist die Konzentration am größten und wie groß ist sie zu diesem Zeitpunkt?

(d) Wann sinkt die Konzentration am stärksten und wie stark sinkt sie zu diesem Zeitpunkt?

4.13. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (3 - e^x)^2$.

(a) Untersuchen Sie f auf Extrem- und Wendepunkte. Geben Sie die Wendetangente an.

(b) Geben Sie die Intervalle an, auf denen f monoton wachsend bzw. fallend ist.

(c) Geben Sie die Intervalle an, auf denen f konvex (linksgekrümmt) bzw. konkav (rechtsgekrümmt) ist.

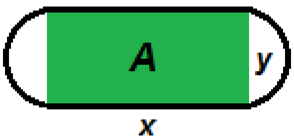
(d) Wie verhält sich f im Unendlichen? ($x \to \pm\infty$). Gibt es Asymptoten?

4.14. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x)$ geht durch den Urspung, hat in $W(-1, 3)$ einen Wendepunkt und bei $x = -2$ eine lokale Extremstelle. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $f(x)$.

4.15. Führen Sie eine Kurvendiskussion für folgende Funktionen durch.

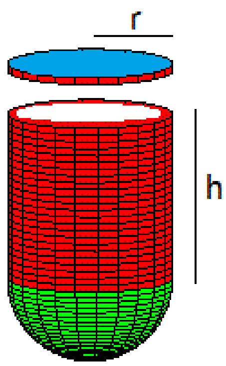
(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 11x$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 22}{x - 2}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

4.16. Das abgebildete Stadion hat die Form eines Rechtecks mit zwei angesetzten Halbkreisen. Der Umfang beträgt 400 m. Welche Maße x, y muss das rechteckige Spielfeld erhalten, wenn seine Fläche A maximal sein soll?



4.17. Ein Erfrischungsgetränk soll in zylindrischen Dosen aus Weißblech angeboten werden. Das Volumen einer Dose soll 330 ml (0,33 l) betragen. Aus Kostengründen und der Umwelt zuliebe soll der Materialbedarf pro Dose durch eine kostengünstige Formgebung möglichst niedrig gehalten werden.
Berechnen Sie Radius und Höhe einer solchen "optimalen" Dose.

4.18. Ein Kessel soll die Form einer Halbkugel mit aufgesetztem Zylindermantel haben und einen Deckel besitzen. Die Oberfläche von Kessel und Deckel soll insgesamt 150 dm^2 betragen.
Wie sind der Radius r und die Höhe h zu wählen, damit der Kessel ein möglichst großes Volumen hat?



5 Integralrechnung

5.1 Stammfunktionen, (Un-)Bestimmte Integrale, Integrationsregeln

Die StudienanfängerInnen sollten

- den Begriff der Stammfunktion und die Stammfunktionen grundlegender Funktionen kennen (5.1 – 5.3)
- die Summen- und die Faktorregel kennen und diese sowie einfache Kombinationen davon anwenden können (5.2, 5.4)
- bestimmte Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen berechnen können (5.5, 5.6, 5.8)

5.1. Geben Sie die folgenden Grundintegrale an:

(a) $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\int e^x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int x^n\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{R}, n \neq -1$ (e) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

5.2. Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\int (3x^4 - 5x^2 + 10)\,\mathrm{d}x$ (b) $\int \left(x + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \left(\sqrt[3]{u} - 3\sqrt{u^3}\right)\,\mathrm{d}u$ (d) $\int (3 - 5e^x)\,\mathrm{d}x$

(e) $\int \left(3\cos(x) + 2x^3\right)\,\mathrm{d}x$ (f) $\int \frac{t^4 + t^3 + t^2 - 1}{t^3}\,\mathrm{d}t$

(g) $\int \frac{(3x^2+4)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int \left(ae^x + bx^{-4} + c\sin(x)\right)\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{e^{2x} + e^{x-2}}{e^x}\,\mathrm{d}x$ (j) $\int \frac{\sqrt[3]{x^7} - 3\sqrt[5]{x^2}}{x^6}\,\mathrm{d}x$

5.3. Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(a) Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

(b) Es gilt $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$.

(c) Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur um einen konstanten Summanden.

(d) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.

(e) f hat genau eine Ableitung, aber viele Stammfunktionen.

(f) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

5.4. (∗) Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int e^{-\frac{1}{5}x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int (-x+4)^{-2}\,\mathrm{d}x$

5.5. Ermitteln Sie den exakten Wert der folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} (5x^4+x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$

(e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \big(3\cos(x)-2\sin(x)\big)\,\mathrm{d}x$

5.6. Gegeben seien die zwei Formeln

$$V=\pi\int_1^3 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad M=2\pi\int_1^3 f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie V und M für die Funktion $y=f(x)=\frac{5}{12}x-\frac{1}{12}$. Geben Sie die Ergebnisse jeweils exakt und als Dezimalzahl auf vier Kommastellen gerundet an.

5.7. Begründen Sie ohne Rechnung, warum die folgenden Gleichungen gelten. Weisen Sie anschließend rechnerisch die Gleichheit nach.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3+3x)\,\mathrm{d}x = 0$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 4\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x^4-x^2+1)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} (2x^4-x^2+1)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{0} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

5.8. Ermitteln Sie den exakten Wert der folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\ln(4)} e^t\,\mathrm{d}t$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{5} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{u^2+1}{2u}\,\mathrm{d}u$

5.2 Anwendung der Integralrechnung

Die StudienanfängerInnen sollten

- das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt interpretieren und die Integralrechnung zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Kurven anwenden können (5.7, 5.9 – 5.13)
- das bestimmte Integral als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate interpretieren können (5.14)

5.9. Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das von der x-Achse und der durch $y = f(x),\ x \in \mathbb{R}$, gegebenen Kurve eingeschlossen wird.

(a) $f(x) = 4 - x^2$

(b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

(c) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

(d) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

5.10. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parabelsegmentes, das die Gerade $y = 2x + 1$ von der Parabel $y = x^2 - 4x + 6$ abschneidet. Skizzieren Sie dieses Segment.

5.11. Berechnen Sie den Inhalt des von den Kurven $y = 1 - x^2$ und $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$, eingeschlossenen Flächenstücks. Skizzieren Sie dieses Flächenstück.

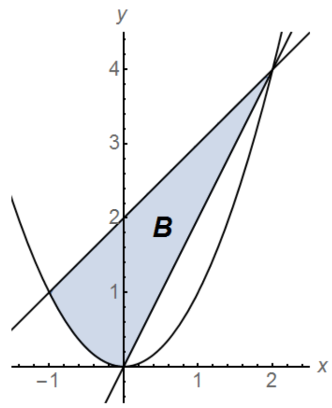
5.12. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des ebenen Bereiches B, der seitlich durch $x = a$ und $x = b$ sowie oben und unten durch die Graphen der Funktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$ begrenzt wird.

(a) $a = 0,\ b = 2,\ f(x) = x^2,\ g(x) = x^2 - x + 1$

(b) $a = -1,\ b = 1,\ f(x) = x^3 + 4,\ g(x) = -2x$

(c) $a = 1,\ b = 2,\ f(x) = x^3 - x,\ g(x) = x^3 - 4x^2$

5.13. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Bereiches B, der von der Normalparabel und zwei Geraden eingeschlossen wird.



5.14. Ein Sportwagen erhöht seine Geschwindigkeit bei einem Test aus dem Stand nach der Formel $v(t) = -9 \cdot 10^{-4} t^4 + 0,06 t^3 - 1,65 t^2 + 18t \quad (0 \le t \le 20,\ \ t \text{ in s},\ v \text{ in m/s})$.

(a) Bestimmen Sie die Weg-Zeit-Funktion $s(t)$ des Fahrzeugs. (Hinweis: $v(t) = s'(t)$)

(b) Welche Strecke legt das Auto in den ersten 20 Sekunden zurück?

6 Geometrie

Die StudienanfängerInnen sollten

- mit 2- und 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystemen arbeiten können
- eine analytisch gegebene Gerade zeichnen können (6.1, siehe auch Kapitel 3.1)
- die allgemeine Kreisgleichung kennen und einen durch eine Gleichung gegebenen Kreis zeichnen können (6.2)
- einfache Objekte im 3-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem zeichnen können (6.3)
- elementare geometrische Objekte (Kreise, Kugeln, etc.) anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren können (6.6)
- Strecken und Winkel mithilfe wichtiger Sätze der Elementargeometrie (Winkelsummen, Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, Satz von Pythagoras, Strahlensätze, Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, etc.) bestimmen können (6.4, 6.5, 6.7)
- Umfänge, Flächeninhalte, Volumina, etc. einfacher geometrischer Objekte ggf. mit Nutzung eines Tafelwerkes berechnen können (6.8 – 6.13)

6.1. Skizzieren Sie die folgenden Geraden in einem geeigneten Koordinatensystem.

(a) $y = 3x - 4$ (b) $10x + 15y = 30$ (c) $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$

(d) $k = 0,1t + 1,2$ (e) $s = 2 - (2 - 18t)/3$

6.2. Skizzieren Sie die folgenden Kreise in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2 + y^2 = 25$

(c) $(x-1)^2 + y^2 = 25$ (d) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25$

(e) $x^2 - 2x + y^2 = 0$ (f) $x^2 - 2x + y^2 + 8y + 1 = 0$

Hinweis: Nutzen Sie bei (e) und (f) die quadratische Ergänzung, um die Kreisgleichung in die Form $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ zu überführen.

6.3. Skizzieren Sie jeweils im x, y, z-Koordinatensystem:

(a) die Gerade durch die Punkte $A(1, 3, -1)$ und $B(2, -1, 3)$

(b) einen waagerecht stehenden Würfel mit der Kantenlänge 2

(c) das Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(0, 4, 2)$, $P_2(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ und $P_3(6, 0, 4)$

(d) das Tetraeder mit den Eckpunkten $E_1(7, 1, 0)$, $E_2(2, 6, 0)$, $E_3(2, 1, 0)$ und $E_4(2, 1, 5)$

(e) eine aufrecht stehende Pyramide mit der Höhe 4 und einer quadratischen Grundfläche mit der Kantenlänge 3

(f) die Ebene mit der Ebenengleichung $x + 2y + z = 4$
(zeichnen Sie dazu die Schnittgeraden der Ebene mit der x, y-, der x, z- und der y, z-Ebene, indem Sie zuerst die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen bestimmen)

6.4. Ergänzen Sie die folgenden Sätze zu Aussagen, die immer wahr sind.

(a) Die Summe zweier Nebenwinkel ist ...

(b) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt ...

(c) Scheitelwinkel sind ... groß.

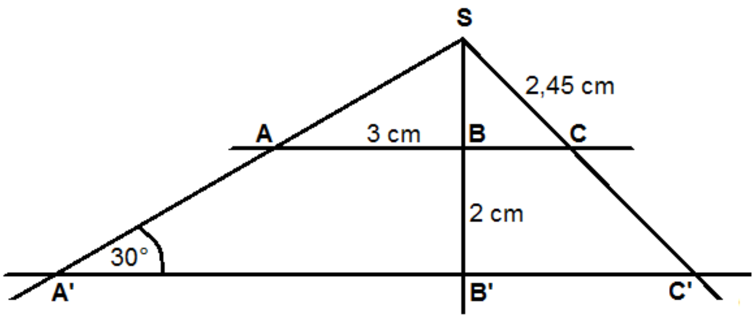
(d) Ein spitzer Winkel ist ... groß.

(e) Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks beträgt ...

(f) Bei ... spricht man von einem rechten Winkel.

(g) Wechselwinkel an parallelen Geraden sind ... groß.

6.5. Tragen Sie im folgenden Bild alle fehlenden Winkel und Seitenlängen ein.



6.6. Geben Sie zu den folgenden Typen von Vierecken jeweils beschreibende Eigenschaften an, die ein Viereck zu genau diesem Typ Viereck machen:

Trapez , *Raute* , *Quadrat* , *Rechteck* , *Drachenviereck* , *Parallelogramm*

Geben Sie ferner Teilmengenbeziehungen zwischen den Typen von Vierecken an, z.B. "Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck".

6.7. Eine geradlinig verlaufende Straße hat eine Steigung von 8%. Welchem Anstiegswinkel (gemessen zur Horizontalen) entspricht das und welche horizontale sowie vertikale Distanz legt man zurück, wenn man die Straße $2\,km$ entlangfährt?

6.8. Ein Bahnradfahrer fährt 20 Runden auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius $64\,m$ bei einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $30\,km/h$. Wie viele Minuten braucht er dafür?

6.9. Ein $10\,m$ langer leerer Dachboden habe den Querschnitt

(a) eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe $5,5\,m$ sowie der Breite $6,4\,m$,

(b) eines Halbkreises mit dem Radius $5\,m$.

Wieviel Kubikzentimeter Luft befinden sich darin?

6.10. Ein quaderförmiges Stück Metall mit der Breite $10\,cm$, der Tiefe $7\,cm$ und der Höhe $15\,cm$ wird mit einem $1\,cm$ dicken Bohrer von oben mittig durchbohrt.

(a) Welches Volumen hat das verbliebene Stück Metall?

(b) Die Seitenwand des Bohrlochs muss eingefettet werden, damit sich kein Rost ansetzt. Wieviele Quadratzentimeter sind das?

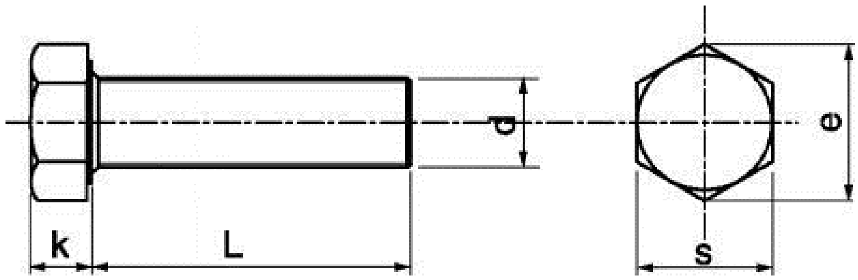
6.11. Ein Töpfer hat ein würfelförmiges Stück Ton mit der Kantenlänge $2\,dm$. Er möchte daraus einen Kreiskegel formen, dessen Grundkreisradius $1,5\,dm$ beträgt.

(a) Wie hoch wird dieser Kegel sein?

(b) Der fertige Kreiskegel soll vor dem Brennen komplett mit einer Glasur überzogen werden. Wieviele Milliliter Glasur benötigt der Töpfer dabei, wenn er pro Quadratdezimeter $10\,ml$ Glasur verbraucht?

6.12. Der Planet Merkur hat annähernd die Form einer Kugel. Sein Umfang beträgt $15\,329\,km$ und die mittlere Dichte ist $5,427\,g/cm^3$. Wie schwer ist der Merkur und wie groß ist seine Oberfläche ungefähr?

6.13. Eine Sechskant-Holzschraube habe eine Kopfhöhe von $k = 5,5\,mm$ und einen Kopfdurchmesser von $e = 10,89\,mm$. Berechnen Sie die Schlüsselweite s sowie das Volumen des Schraubenkopfes.



7 Vektorrechnung

7.1 Vektoren und Punkte

Die StudienanfängerInnen sollten

- Vektoren miteinander vergleichen können (7.1)
- Vektoren addieren bzw. mit einem Skalar multiplizieren können, sowie das Skalarprodukt zweier Vektoren bilden können (7.2)
- den Betrag eines Vektors und den Winkel zwischen zwei Vektoren ausrechnen können (7.2 – 7.5)
- Punktmengen im zwei- und dreidimensionalen Anschauungsraum mit Hilfe von Vektoren untersuchen können (7.3, 7.5)
- (das Vektorprodukt zweier Vektoren bilden können) (7.6)

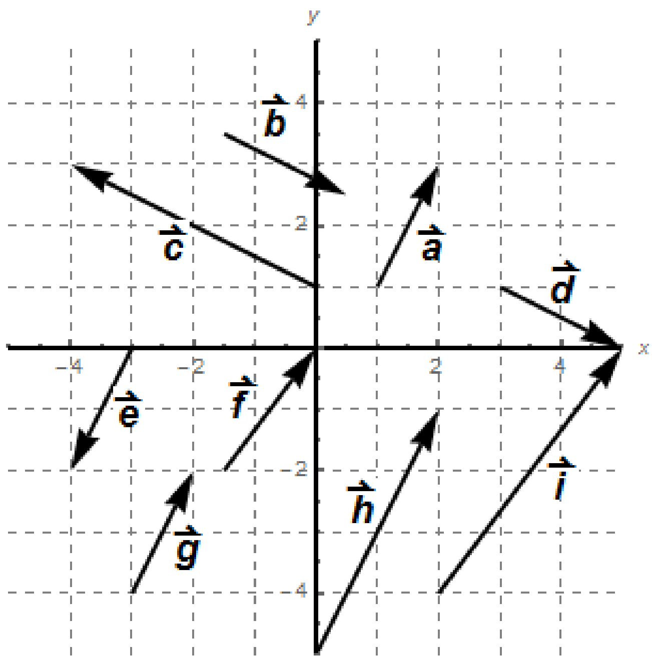
7.1. Schreiben Sie jeden der Vektoren als Spaltenvektor auf.

Welche Vektoren sind gleich?

Welche Vektoren sind zueinander entgegengesetzt?

Welche Vektoren haben dieselbe Richtung?

Welche Vektoren haben denselben Betrag?



7.2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ und $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Vektoren $2\vec{a}$, $-\frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{b}-\vec{a}$.

(b) Stellen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $2\vec{a}$, $-\frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{b}-\vec{a}$ zeichnerisch dar.

(c) Berechnen Sie $|\vec{b}-\vec{a}|$, und interpretieren Sie das Ergebnis anschaulich.

(d) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$.

(e) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

7.3. Die drei Punkte $A(2,1)$, $B(4,3)$, $C(1,3)$ bestimmen ein Dreieck in der Ebene.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) Beschreiben Sie die Dreiecksseiten als Vektoren und bestimmen Sie deren Länge.

(c) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.

7.4. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{c} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{v}_1 = 2\vec{a}$, $\vec{v}_2 = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{v}_3 = 4\vec{a} - 5\vec{b} + 7\vec{c}$.

(b) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

(c) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$.

(d) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

7.5. Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1,-3,7)$, $B(-2,2,0)$, $C(-3,7,4)$ und $D(0,2,11)$.

(a) Bestimmen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{DC}$. Zeigen Sie, dass es sich bei $ABCD$ um ein Parallelogramm handelt.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$. Ist $ABCD$ sogar ein Rechteck?

(c) Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und C.

7.6. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$.

(b) Welche Eigenschaften hat der Vektor $\vec{c}$ im Vergleich zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

(c) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen $\vec{c}$ und $\vec{d}$?

(d) Ist der Vektor $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

7.2 Geraden und Ebenen

Die StudienanfängerInnen sollten

- mit Hilfe von Vektoren Geraden und Ebenen im Raum darstellen können, d.h. insbesondere Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen sowie parameterfreie Darstellungen von Ebenen aufstellen können (7.7, 7.9)
- (die Lage von Geraden und/oder Ebenen zueinander bestimmen können) (7.8, 7.10, 7.11)

7.7. Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2. Die Gerade g_1 verläuft durch die Punkte $A(3,0,1)$ und $B(9,-2,5)$ und die Gerade g_2 geht durch den Punkt $C(-5,3,1)$ und ist parallel zu g_1.

(a) Geben Sie die Ortsvektoren von A und B sowie den Verbindungsvektor von A nach B an.

(b) Geben Sie Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 an. Machen Sie dabei kenntlich, welcher Vektor als Stützvektor und welcher als Richtungsvektor der Geraden bezeichnet wird.

7.8. Gegeben sind die zwei Geraden g_1, g_2 aus Aufgabe 7.7 sowie die Gerade g_3 mit der Parameterdarstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Lage von g_1 und g_3 zueinander. Falls sie sich schneiden, bestimmen Sie den Schnittpunkt S.

(b) Zeigen Sie, dass die Geraden g_2 und g_3 zueinander windschief sind.

7.9. Gegeben ist eine Ebene E, welche die drei Punkte $P_1(1,5,0)$, $P_2(2,-3,1)$ und $P_3(3,1,1)$ enthält.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von E an.

(b) Bestimmen Sie eine parameterfreie Darstellung (Koordinatenform) von E.

7.10. Gegeben ist die Ebene E aus Aufgabe 7.9.

(a) Liegt der Punkt $P_4(4,3,1)$ ebenfalls in E?

(b) Wo schneidet die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$, die Ebene E?

7.11. Gegeben sind die Ebene E_1 in Parameterdarstellung und die Ebene E_2 in parameterfreier Darstellung:

$$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}, \qquad E_2:\ 2x - y + 2z = 2$$

Bestimmen Sie die Lage von E_1 und E_2 zueinander. Falls sie sich schneiden, bestimmen Sie die Schnittgerade g.

8 Lösungen

8.1 Lösungen zu Kapitel 1

Grundlegende Rechenregeln

1.1 (a) $b = \frac{169}{289} = \frac{13^2}{17^2} = \frac{13}{17} \cdot \frac{13}{17} < \frac{13}{17} \cdot 1 = \frac{13}{17} = a$, also $a > b$

(b) $12 = \sqrt{144} < \sqrt{150} < \sqrt{169} = 13$

(c) nein, da $\sqrt{3+4} = \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$ und $\sqrt{3} + \sqrt{4} = \sqrt{3} + 2 > \sqrt{1} + 2 = 3$

(d) ja, denn $4 = 2^2 = \left(\frac{82}{41}\right)^2 < \left(\frac{99}{41}\right)^2 < \left(\frac{123}{41}\right)^2 = 3^2 = 9$

1.2 (a) $0,2$ (b) $0,12345$ (c) 45 (d) $0,3$ (e) 690 (f) $0,03$

1.3

(a) $0,005\,mm = 5 \cdot 10^{-3}\,mm = 5 \cdot 10^{-6}\,m = 0,000005\,m$

(b) $\frac{3}{4}\,l = 0,75\,l = 0,75 \cdot 100\,cl = 75\,cl$

(c) $12,5m \cdot 4cm = 12,5 \cdot 10\,dm \cdot 4 \cdot 10^{-1}\,dm = 12,5 \cdot 4\,dm^2 = 50\,dm^2$

(d) $10\,m/s = 10\,\frac{m}{s} = 10 \cdot \frac{10^{-3}\,km}{3600^{-1}\,h} = 10 \cdot \frac{3600\,km}{10^3\,h} = 10 \cdot 3,6\,\frac{km}{h} = 36\,km/h$

(e) $1,2\,t \cdot 500\,g = 1,2 \cdot 10^3\,kg \cdot 500 \cdot 10^{-3} kg = 1,2 \cdot 500\,kg^2 = 600\,kg^2$

(f) $2\,kg/m^3 = 2\,\frac{kg}{m^3} = 2 \cdot \frac{10^3\,g}{(100\,cm)^3} = 2 \cdot \frac{10^3\,g}{10^6\,cm^3} = 2 \cdot \frac{g}{10^3\,cm^3} = 2 \cdot 10^{-3} \frac{g}{cm^3} = 0,002\,g/cm^3$

1.4 (a) 24€ (b) 420 Personen (c) $20\,min$ (d) $1\,h, 12\,min$

1.5

(a) $-9x(x+y)$ (b) $-(b+2d+5)$

(c) $9x^2 - 4x + 16$ (d) $-12a^2 + 20ab - 3b^2$

(e) $ab^2 - 2abc$ (f) $st(s+t)^2$

(g) $20t^3 - 36t^2 + 21t + 4$

1.6

(a) $4ac^2(3a - 5bc)$ (b) $4a(2bc - 3ab + 9c^2)$

(c) $h(13a - 25b + 2h)$ (d) $5x(2x^3 - x^2 + 23)$

1.7

(a) $x^2 + 8x + 16$ (b) $x^2 - 4$

(c) $4x^2 - 4x + 1$ (d) $9a^2 + 12ab + 4b^2$

1.8
(a) $(x-2)^2$ (b) $(x+4)(x-4)$
(c) $(x+y)^2$ (d) $(3x+1)^2$
(e) $(4x+3y)(4x-3y)$ (f) $(2a+5b)^2$

1.9
(a) $4a(2a+b)$ (b) b^2
(c) $4a^2-2b^2+c^2$ (d) $16ab-13a^2-5b^2$

1.10
(a) $(x^2-2)^2+11$ (b) $(x+2)^2-9$
(c) $(x+5)^2$ (d) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$
(e) $(x+2)^2+16$ (f) $4\left(x+\frac{9}{2}\right)^2-49=(2x+9)^2-49$

Bruchrechnung

1.11
(a) $\frac{11}{3}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) $\frac{21}{5}$ (d) $\frac{38}{5}$ (e) 6
(f) $\frac{15}{4}$ (g) $\frac{7}{12}$ (h) $\frac{75}{28}$ (i) $\frac{5}{12}$ (j) $\frac{3}{13}$
(k) 24 (l) $\frac{15}{8}$ (m) $\frac{12}{13}$ (n) $-\frac{5}{98}$ (o) $\frac{11}{80}$

1.12
(a) $\dfrac{(x+a)^2}{ax^2}, \quad x,a\neq 0$ (b) $\dfrac{5x^3+4x^2-12}{6x^4}, \quad x\neq 0$
(c) $\dfrac{2x^2+x-5}{x+2}, \quad x\neq -2$ (d) $\dfrac{xyz}{xy+xz+yz}, \quad x,y,z,xy+xz+yz\neq 0$
(e) $-1, \quad a,b,c,a-b\neq 0$ (f) $-\dfrac{a+b}{2a}, \quad a,a+b\neq 0$

1.13
(a) $\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ $D_{alt}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ D_{neu}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
(b) $\dfrac{x-a}{2x}$ $D_{alt}=\mathbb{R}\setminus\{-a,0\},\ D_{neu}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
(c) $\dfrac{2y+3}{5}$ $D_{alt}=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ D_{neu}=\mathbb{R}$

Bem: Abhängig von der Aufgabe ist es manchmal sinnvoll, auch nach dem Kürzen den alten Definitionsbereich beizubehalten.

1.14
(a) $-\dfrac{x}{2(x-2)}$ (b) $\dfrac{-4}{(x-1)(x+1)^2}$

1.15
(a) $\dfrac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$ $, x+y, x-y, x^2-2xy-y^2\neq 0$
(b) $\dfrac{3b}{2a}\cdot\dfrac{9-b^2}{9+b^2}$ $, a\neq -2,0; b\neq \pm 3$
(c) $\dfrac{x}{x+4}$ $, x\neq -4,-3,2$
(d) $-\dfrac{b}{a^2}$ $, a,b\neq 0,\ a\neq b,2b$

Prozentrechnung

1.16
(a) Erfolgsquote: $\approx 64,29\,\%$ Durchfallquote: $\approx 35,71\,\%$
(b) Erfolgsquote: $75\,\%$ Durchfallquote: $25\,\%$

1.17 (a) zukünftiger Preis: 137,50 € (b) um $9,\overline{09}\,\% \approx 9,1\,\%$ billiger

1.18 $\approx 3,57$ €

1.19 (a) 60 € (b) $9,\overline{09}\,\% \approx 9,1\,\%$

1.20 (a) 110 € (b) 111,91 €

Potenz- und Wurzelrechnung

1.21

(a) 4	(b) 4	(c) $\frac{1}{4}$	(d) $\frac{1}{4}$
(e) -4	(f) $\sqrt{2} \approx 1.4142$	(g) n.d.	(h) $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$
(i) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7071$	(j) n.d.	(k) $\frac{1}{4}$	(l) $\frac{1}{2}$
(m) 4	(n) $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$	(o) $\sqrt{2}$	(p) $\frac{1}{4}$
(q) 4	(r) n.d.	(s) n.d.	(t) $\frac{1}{2}$

1.22 in vorgegebener Reihenfolge:

$\sqrt{8}$	0	$(-2)^3$	$(0,5)^{-2,5}$	1	4	$0,25$	$2^{-3,1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2,5}$	8	2^{-3}
$2^{\frac{3}{2}}$	0	-2^3	$2^{\frac{5}{2}}$	2^0	2^2	2^{-2}	$2^{-3,1}$	$2^{-\frac{5}{2}}$	2^3	2^{-3}

in geordneter Reihenfolge:

$(-2)^3$	0	$2^{-3,1}$	2^{-3}	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2,5}$	$0,25$	1	$\sqrt{8}$	4	$(0,5)^{-2,5}$	8
-2^3	0	$2^{-3,1}$	2^{-3}	$2^{-\frac{5}{2}}$	2^{-2}	2^0	$2^{\frac{3}{2}}$	2^2	$2^{\frac{5}{2}}$	2^3

1.23

(a) 5	(b) $\sqrt{8} \approx 2.8284$	(c) $\dfrac{1}{8}$	(d) $\dfrac{512}{27}$
(e) $2^{\frac{7}{8}} \approx 1.8340$	(f) 32	(g) $\dfrac{3}{4}$	(h) $\dfrac{3}{4}$
(i) 4	(j) 6		

1.24

(a) $127x^7$	(b) $\dfrac{1}{x^{10}}$	(c) $\dfrac{y^8}{x^4}$	(d) x^2y^4
(e) $b^{20}c^8$	(f) $\dfrac{b}{a}$	(g) $-(-x-2)^n$	(h) $x^{25} - x^{39}$
(i) $1 + (-1)^n$	(j) $\dfrac{a^l}{b^{5n+1}}$		

1.25
(a) $(3x+1)^{\frac{1}{2}},\ x \geq -\dfrac{1}{3}$
(b) $t^{\frac{4}{3}},\ x \geq 0$
(c) $(x^2+4x)^{-\frac{2}{7}},\ x < -4 \text{ oder } x > 0$

1.26
(a) $\sqrt{x^2+y^2}+1,\ x, y \in \mathbb{R}$ bel.
(b) $x^{\frac{37}{20}},\ x > 0$
(c) $\sqrt{2x^3+5x},\ x > 0$
(d) $x^{\frac{13}{8}},\ x > 0$
(e) $x^2-y^2,\ x+y, x-y \geq 0$
(f) $2\sqrt{p^2-q^2},\ p+q, p-q \geq 0$

Logarithmenrechnung

1.27
(a) 2
(b) 5
(c) 3
(d) 0
(e) -4
(f) -1
(g) -1
(h) $\frac{1}{2}$
(i) $\frac{1}{2}$

1.28
(a) 49
(b) $10^{-5} = \frac{1}{100000}$
(c) 1
(d) $\frac{1}{64}$
(e) $\frac{1}{4}$
(f) $25\sqrt{5}$

1.29
(a) 5
(b) 10
(c) 2
(d) $\frac{1}{3}$
(e) 3
(f) e
(g) 16
(h) 8
(i) n.d.

1.30
(a) a
(b) 2
(c) $\ln(e^3-1) \approx 2.9489$
(d) 7
(e) 0
(f) 0
(g) 2

1.31
(a) 10
(b) 8
(c) $3e$
(d) 4

1.32
(a) $\ln\left(\frac{ab^2}{2c^2}\right),\ a, b, c > 0$
(b) $\log_a(x),\ x > 0$
(c) $0,\ a-b > 0$
(d) $-\frac{1}{6}\ln(x^2-y^2),\ x-y, x+y > 0$

Formelumstellung

1.33
(a) $R = \dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}, \quad R_1 = \dfrac{RR_2}{R_2-R}, \quad R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1-R}$

(b) $f = \dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2-d}, \quad f_1 = \dfrac{f(f_2-d)}{f_2-f}, \quad f_2 = \dfrac{f(f_1-d)}{f_1-f}$

(c) $n = \dfrac{IR_a}{U-IR_i}, \quad R_i = \dfrac{nU-IR_a}{nI}, \quad R_a = \dfrac{n(U-IR_i)}{I}$

(d) $L = \dfrac{X}{\omega} + \dfrac{1}{\omega^2 C}, \quad C = \dfrac{1}{\omega^2 L - \omega X}, \quad \omega = \dfrac{1}{2L}\left(X \pm \sqrt{X^2 + \dfrac{4L}{C}}\right)$

(e) $c = (T - T_U)e^{kt}, \quad k = -\frac{1}{t}\ln\big(\frac{1}{c}(T - T_U)\big)$

(f) $C = \frac{4L}{(4\pi f L)^2 + R^2}, \quad R = \pm\sqrt{4L^2\left(\frac{1}{LC} - (2\pi f)^2\right)},$

$$L = \frac{1}{8\pi^2 f^2 C} \pm \sqrt{\frac{1}{64\pi^4 f^4 C^2} - \frac{4\pi^2 f^2 R^2 C^2}{64\pi^4 f^4 C^2}}$$

(g) $K_0 = \frac{K}{q^n} - \frac{R}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad R = (K - K_0 q^n)\frac{q-1}{q^n - 1},$

$$n = \frac{1}{\ln(q)} \cdot \ln\left(\frac{K(q-1) + R}{K_0(q-1) + R}\right)$$

8.2 Lösungen zu Kapitel 2

Gleichungen mit einer Unbekannten

2.1 Im folgenden bedeutet "$\Longleftrightarrow$" eine äquivalente Umformung.

(a) Gegeben ist die Gleichung $a = b$.

$$\begin{array}{lrcll}
 & a & = & b & \mid \cdot a \text{ (nur für } a \neq 0 \text{ äquival. Umformung)} \\
\Longrightarrow & a^2 & = & ab & \mid -b^2 \\
\Longleftrightarrow & a^2 - b^2 & = & ab - b^2 & \mid \text{Distrib.gesetz/binom. Formel} \\
\Longleftrightarrow & (a+b)(a-b) & = & b(a-b) & \mid : (a-b) \text{ (falsch, da Division durch 0)} \\
\not\Longleftrightarrow & (a+b) & = & b & \mid \text{ ersetzen von } b \text{ durch } a \\
\Longleftrightarrow & a + a & = & a & \mid \text{ zusammenfassen} \\
\Longleftrightarrow & 2a & = & a & \mid \cdot a \text{ (nur für } a \neq 0 \text{ äquival. Umformung)} \\
\Longleftarrow & 2 & = & 1 &
\end{array}$$

Der Hauptfehler ist also die Division durch $a - b = 0$.

(b) Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{2x^2 - 1} + x = 0$.

$$\begin{array}{lrcll}
 & \sqrt{2x^2-1} + x & = & 0 & \mid -x \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{2x^2-1} & = & -x & \mid (\ \ )^2 \text{ (keine äquival. Umformung)} \\
\Longrightarrow & (\sqrt{2x^2-1})^2 & = & (-x)^2 & \\
\Longleftrightarrow & 2x^2 - 1 & = & x^2 & \mid -x^2 + 1 \\
\Longleftrightarrow & x^2 & = & 1 & \mid \sqrt{\ } \\
\Longleftrightarrow & |x| & = & 1 & \\
\Longleftrightarrow & x & = & \pm 1 &
\end{array}$$

Die Rechnung ist korrekt, aber die Interpretation ist falsch. Beim Quadrieren können Scheinlösungen entstehen, daher muss unbedingt noch eine Probe an der Ausgangsgleichung durchgeführt werden, die bei $x = 1$ zu einem Widerspruch führt. Folglich ist nur $x = -1$ eine Lösung der Gleichung.

(c) Gegeben sind $x = 3$ und $y = 4$. Daraus folgt die Gleichung $x + y = 7$.

$$
\begin{array}{rrcll}
 & x+y & = & 7 & \mid \cdot(x-y) \text{ (äqu. Umf., da } x-y \neq 0) \\
\iff & (x+y)(x-y) & = & 7(x-y) & \mid \text{Distrib.gesetz/binom. Formel} \\
\iff & x^2-y^2 & = & 7x-7y & \mid +y^2-7x \\
\iff & x^2-7x & = & -7y+y^2 & \mid +\frac{49}{4} \\
\iff & x^2-7x+\frac{49}{4} & = & y^2-7y+\frac{49}{4} & \mid \text{binom. Formel} \\
\iff & \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 & = & \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 & \mid \sqrt{\ } \text{ (falsch, } \pm \text{ nicht beachtet)} \\
\Longleftarrow & x-\frac{7}{2} & = & y-\frac{7}{2} & \mid +\frac{7}{2} \\
\iff & x & = & y & \\
 & 3 & = & 4 &
\end{array}
$$

Das Wurzelziehen wurde falsch durchgeführt, die darauffolgende Zeile hätte $|x - \frac{7}{2}| = |y - \frac{7}{2}|$ sein müssen.

(d) Gegeben ist die Gleichung $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^5$.

$$
\begin{array}{rrcll}
 & \left(\frac{3}{4}\right)^x & = & \left(\frac{4}{3}\right)^5 & \mid \text{Potenzgesetz} \\
\iff & \frac{3^x}{4^x} & = & \frac{4^5}{3^5} & \mid \cdot 3^5 \cdot 4^x \\
\iff & 3^x \cdot 3^5 & = & 4^x \cdot 4^5 & \mid \text{Potenzgesetz} \\
\iff & 3^{x+5} & = & 4^{x+5} & \mid \ln(\ ) \\
\iff & \ln\left(3^{x+5}\right) & = & \ln\left(4^{x+5}\right) & \mid \text{Logarithmengesetz} \\
\iff & (x+5)\cdot\ln(3) & = & (x+5)\cdot\ln(4) & \mid :(x+5) \text{ (nur für } x \neq -5 \text{ äqu. Umf.)} \\
\Longleftarrow & \ln(3) & = & \ln(4) & \\
\iff & 3 & = & 4 &
\end{array}
$$

Der Fehler liegt bei der Division durch $x + 5$. Die Gleichung hat die Lösung $x = -5$, daher wurde bei der Division durch 0 geteilt.

2.2

(a) $x = \frac{1}{3}$ (b) $x = 2$

(c) $x = \frac{3}{2}$ (d) $x = 3$

(e) $x = -\frac{3}{5}$ (f) $x = \frac{31}{8}$

(g) $x = 0$

(h) $\begin{cases} x = \frac{b}{1-a} & \text{, wenn } a \neq 1 \\ x \in \mathbb{R} \text{ beliebig} & \text{, wenn } a = 1, b = 0 \\ \text{nicht lösbar} & \text{, wenn } a = 1, b \neq 0 \end{cases}$

2.3

(a) $x_{1,2} = 0$ (b) $x_1 = -3,\ x_2 = 0$

(c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ (d) n.l.

(e) $x = \dfrac{14}{5}$ (f) $x_{1,2} = 2$

2.4	(a)	n.l.	(b)	$x_1 = 2,\ x_2 = 3$
	(c)	$x_1 = -7,\ x_2 = -5$	(d)	$x_{1,2} = 1$
	(e)	$x_1 = 2,\ x_2 = 3$	(f)	n.l.
	(g)	$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{3}$	(h)	$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{13}{5}$

2.5	(a)	$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5$	(b)	$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 2$
	(c)	$x_{1,2} = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = 4$	(d)	$x_1 = 0,\ x_{2,3} = 3$
	(e)	$x_{1,2,3,4} = 0,\ x_{5,6} = \pm 2$	(f)	$x_1 = -1,\ x_2 = \sqrt{2}$

2.6	(a)	$x_{1,2} = 0,\ x_{3,4} = \pm 3$	(b)	$x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{7}$
	(c)	$x_{1,2} = \pm 1$	(d)	$x_{1,2} = \pm 2$

2.7	(a)	$x = 2$	(b)	$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$
	(c)	n.l.	(d)	$x_1 = \frac{1}{7},\ x_2 = 1$
	(∗)	$x = 2$	(∗)	$x_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$

2.8	(a)	$x_{1,2} = \pm 2$	(b)	$x_{=} - 5,\ x_2 = 1$	(c)	n.l.
	(d)	$x_1 = 1,\ x_2 = 3$	(e)	$x_1 = -7,\ x_2 = 0$	(f)	n.l.

2.9	(a)	$x = 4$	(b)	$x = -1 - \log_2(5) \approx -3.3219$	(c)	$x = -\frac{3}{2}$
	(d)	$x = 10 - \ln(3) \approx 8.9014$	(e)	$x = -\ln(7) \approx -1.9459$	(f)	$x = -\frac{1}{4}$
	(g)	$x = 0$	(∗)	$x = \ln(6) \approx 1.7918$	(∗)	$x = 0$

2.10	(a)	$x = 2$	(b)	$x = -3$	(c)	$x = e^4 \approx 54.5982$
	(d)	$x = 32$	(e)	$x = \frac{1}{2}$	(f)	$x = 0$

2.11	(a)	$x = e^2 - 1 \approx 6.3891$	(b)	$x = 10^2 - 1 = 99$	(c)	$x_1 = -3,\ x_2 = \frac{1}{3}$
	(d)	$x = -1$	(e)	n.l.	(f)	$x = e^{-1} \approx 0.3679$

Ungleichungen mit einer Unbekannten

2.12

(a)	$L = (-1, \infty)$	(b)	$L = (-\infty, 30]$	(c)	$L = (-\infty, -\frac{3}{2}]$
(d)	$L = (-\infty, 30]$	(e)	$L = [5, \infty)$		

(f) $$L = \begin{cases} \left(-\infty, \frac{a}{a-1}\right) & \text{, wenn } a > 1 \\ \mathbb{R} & \text{, wenn } a = 1 \\ \left(\frac{a}{a-1}, \infty\right) & \text{, wenn } a < 1 \end{cases}$$

2.13	(a)	$L = [2, 3]$	(b)	$L = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$	(c)	$L = \mathbb{R}$
	(d)	$L = \emptyset$	(e)	$L = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$	(f)	$L = (-\frac{7}{4}, \frac{5}{4})$

2.14	(a)	$L = (-2, 2)$	(b)	$L = [-2, 6]$	(c)	$L = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
	(d)	$L = (1, 5)$	(e)	$L = (-\infty, \frac{5}{2}]$	(f)	$L = \emptyset$

(Lineare) Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten

2.15
(a) lineares GS
$(x_1, x_2) = (23, 11)$

(b) lineares GS
$(a, b) = (11, -5)$

(c) nichtlineares GS
$(x, y) = (24, -4)$, $(x, y) = (17, 3)$

(d) nichtlineares GS
$(x, y) = (11, -2)$, $(x, y) = (11, 2)$

2.16
(a) $(x, y) = (-1, 3)$

(b) $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

(c) $(x, y) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

(d) $(x_1, x_2) = \left(-\frac{15}{11}, -\frac{56}{11}\right)$

2.17
(a) 2 und 10

(b) 53 und 19 Jahre

(c) $65 \times 35\,m$

(d) 25, 60 und $65\,cm$

(e) 1. Auto 67 m entfernt, 2. Auto 66 m entfernt

8.3 Lösungen zu Kapitel 3

Lineare und quadratische Funktionen

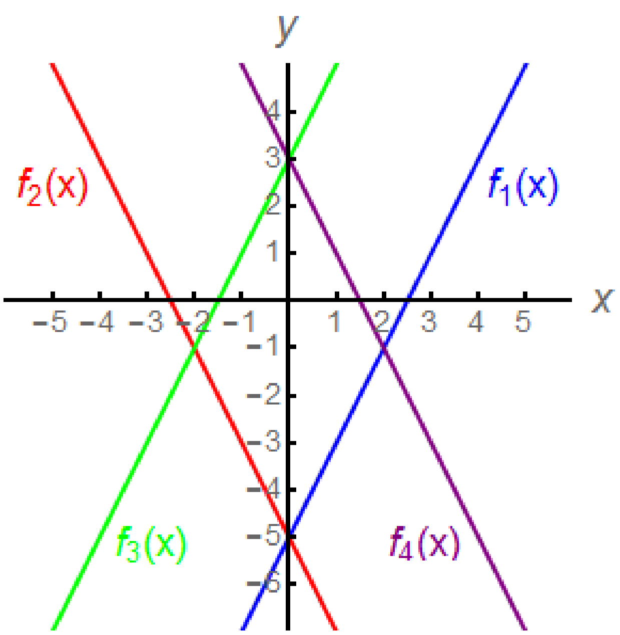
3.1 $y = f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, $S_x\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

3.2 $y = f(x) = \frac{5}{4}x - 5$

3.3 (a) Die Graphen von f_1, f_3 sowie von f_2, f_4 sind parallel.
Die Graphen von f_1, f_2 sowie von f_3, f_4 sind zueinander symmetrisch bzgl. der $y-$Achse.
Alle Graphen, die nicht parallel sind, schneiden sich in einem Punkt.

(b) Nullstelle von $f_1(x)$: $x_{N_1} = \frac{5}{2}$, Nullstelle von $f_4(x)$: $x_{N_4} = \frac{3}{2}$,
Schnittpunkt der Graphen von $f_2(x)$ und $f_3(x)$: $S(-2, -1)$

(c)

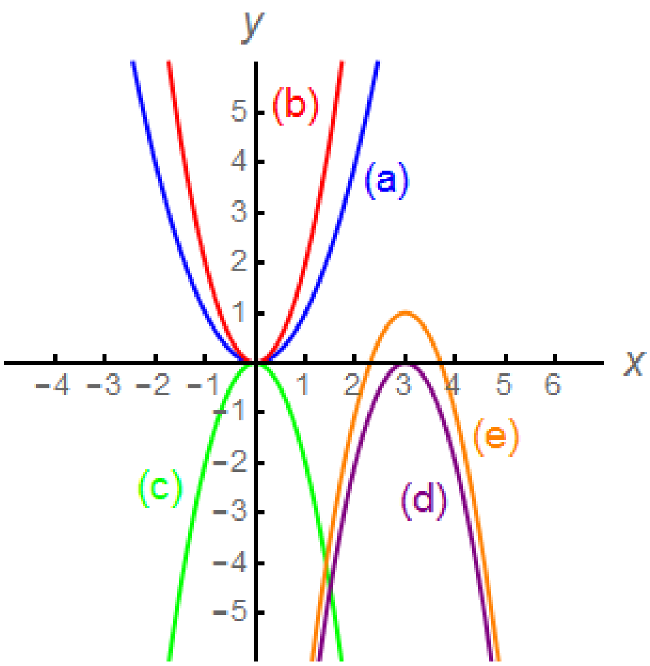


3.4 (a) $\to$ (b) : Streckung um den Faktor 2

(b) $\to$ (c) : Spiegelung an der $x-$Achse

(c) $\to$ (d) : Verschiebung um 3 in Richtung positiver $x-$Achse

(d) $\to$ (e) : Verschiebung um 1 in Richtung positiver $y-$Achse



3.5 Scheitelpunkt $S(d, e)$

– gestreckt, wenn $|a| > 1$ – gestaucht, wenn $|a| < 1$

– nach oben geöffnet, wenn $a > 0$ – nach unten geöffnet, wenn $a < 0$

$f(x) = x^2 + 8x + 17$:	$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$:
(a) $f(x) = (x+4)^2 + 1,\ \ S(-4, 1)$	(a) $g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2,\ \ S(2, -2)$
(b) keine Nullstellen	(b) $x_{N_1} = 0,\ x_{N_2} = 4$
(c) $S_y(0, 17)$	(c) $S_y(0, 0)$
(d) $f(x)$ monoton fallend auf $(-\infty, -4]$), $f(x)$ monoton wachsend auf $[-4, \infty)$	(d) $g(x)$ monoton fallend auf $(-\infty, 2]$, $g(x)$ monoton wachsend auf $[2, \infty)$
(e) $W(f) = [1, \infty)$	(e) $W(g) = [-2, \infty)$

3.6

$h(x) = -3x^2 + 2x + 1$:

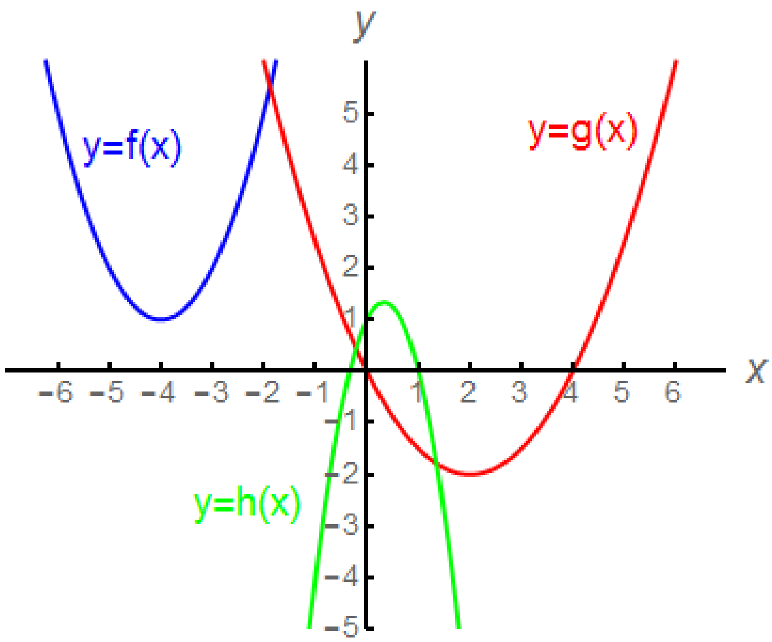
(a) $h(x) = -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3},\ \ S\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(b) $x_{N_1} = -\frac{1}{3},\ x_{N_2} = 1$

(c) $S_y(0, 1)$

(d) $f(x)$ monoton wachsend auf $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $f(x)$ monoton fallend auf $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

(e) $W(f) = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$



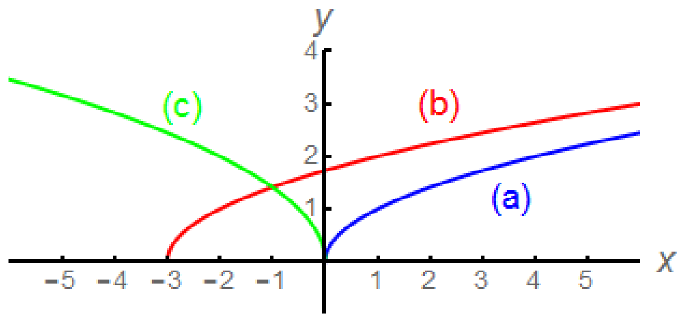
3.7 $f(x) = -2x^2 + 4x$

Potenz- und Wurzelfunktionen etc.

3.8

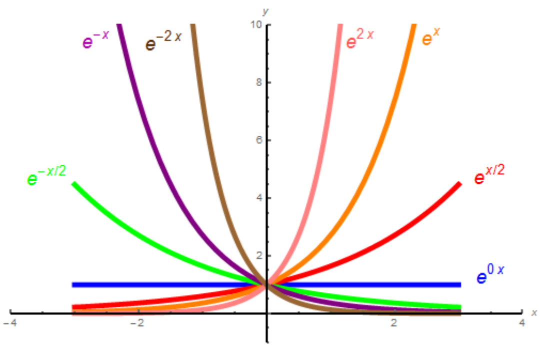
(a): $f_2(x) = (x-3)^3$	(b): $f_6(x) = \frac{1}{2}x^6 + 2$	(c): $f_3(x) = x^4 - 2$
(d): $f_5(x) = -\frac{1}{10}x^5$	(e): $f_1(x) = 2x^3$	(f): $f_4(x) = 2 - (x+3)^4$

3.9
(a) $D = [0, \infty),\ W = [0, \infty)$
(b) $D = [-3, \infty),\ W = [0, \infty)$
(c) $D = (-\infty, 0],\ W = [0, \infty)$

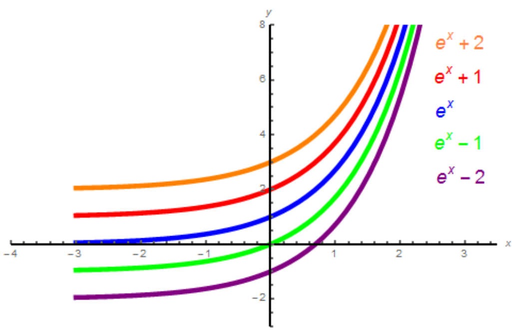


Exponential- und Logarithmusfunktionen etc.

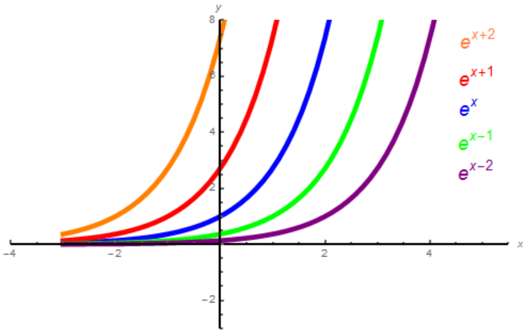
3.10



(a)

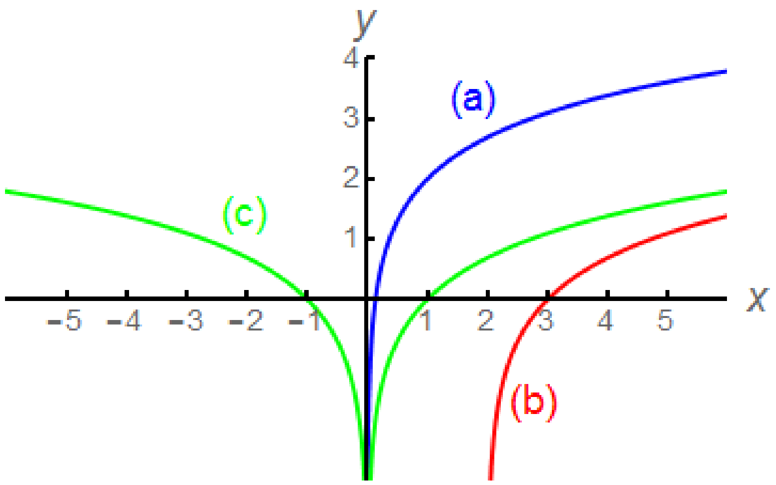


(b)



(c)

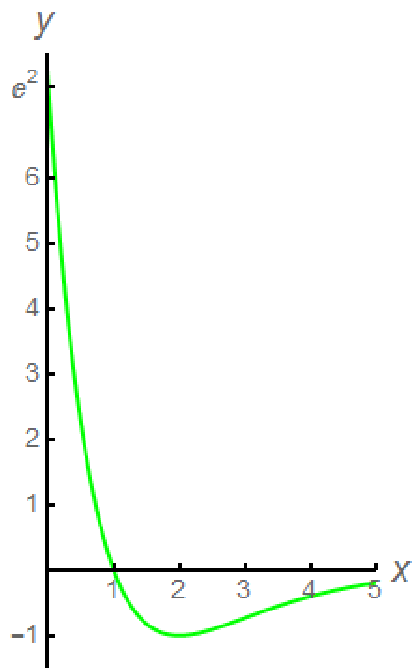
3.11



3.12

(a) $S_x(1,0),\ S_y(0,e^2)$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$



(b)

3.13 (a) $T(t) = 20 + 70e^{-\frac{1}{10}\ln\left(\frac{35}{23}\right)t}$
$= 20 + 70\cdot\left(\frac{35}{23}\right)^{-\frac{t}{10}} \approx 20 + 70e^{-0{,}042t}$
(t in min, $T(t)$ in °C)

(b) $T(20) \approx 50{,}23$°C

(c) $T(t) = 40°$ für $t \approx 29\,\text{min}\,50\,\text{sek}$

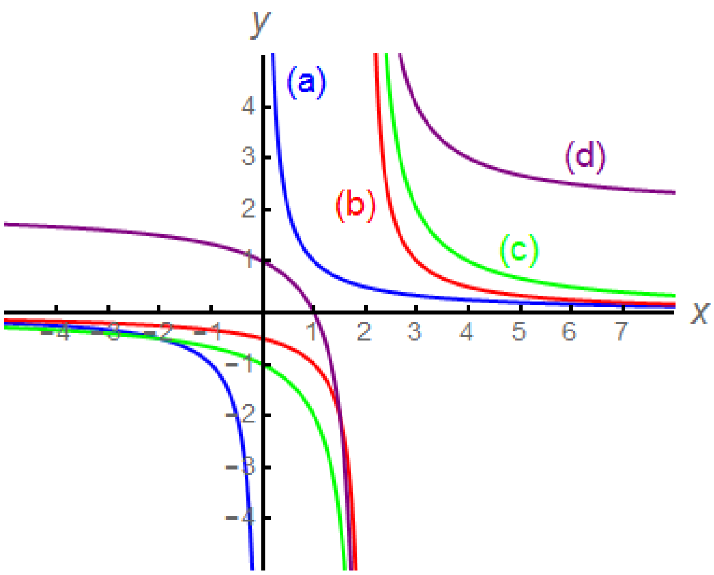
(d) $\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = 20$°C

3.14 (a) $N(t) = 1000\cdot e^{\ln(0{,}993)t} = 1000\cdot 0{,}933^t$ (t in Tagen, $N(t)$ in mg)

(b) Halbwertszeit $t = -\frac{\ln(2)}{\ln(0{,}933)} \approx 10$ Tage

Gebrochen-rationale Funktionen

3.15

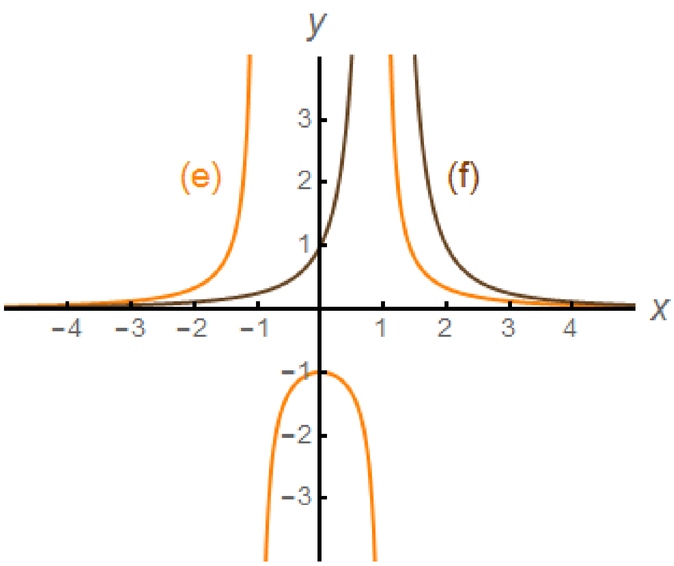


(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y_A = 0$

(b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y_A = 0$

(c) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y_A = 0$

(d) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$, Asymptote: $y_A = 2$



(e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $W = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y_A = 0$

(f) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $W = (0, \infty)$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, Asymptote: $y_A = 0$

3.16 (a)

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$

Nullstellen: $x_N = -5$

$\lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = -\infty,$

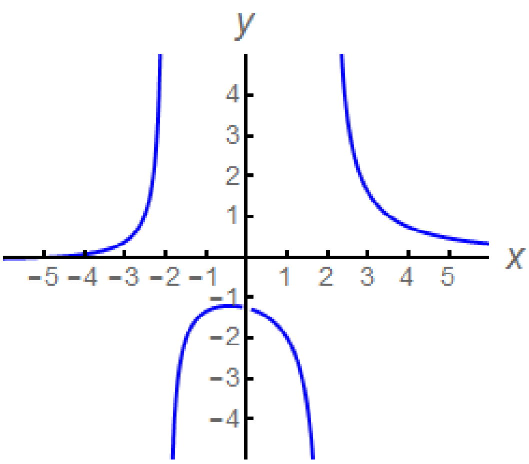
$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \infty,$

$\rightarrow \quad x = \pm 2$ sind Polstellen

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\frac{5}{4}$

$\rightarrow x = 0$ ist (behebbare) Lücke

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$ Asymptote: $y_A = 0$



(b)

$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$

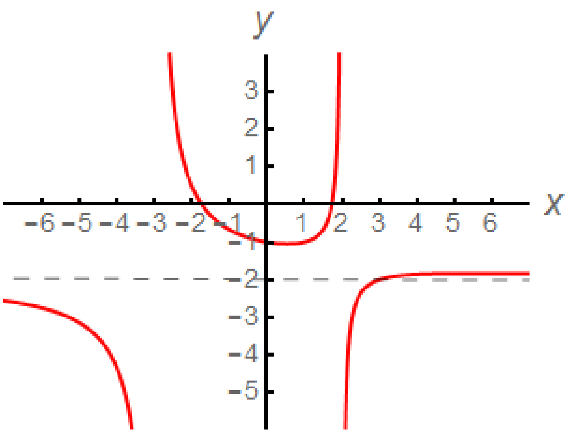
Nullstellen: $x_{N_1,N_2} = \pm\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = \infty,$

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = -\infty,$

$\rightarrow \quad x = -3$ und $x = 2$ sind Polstellen

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -2,$ Asymptote: $y_A = -2$



(c)

$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

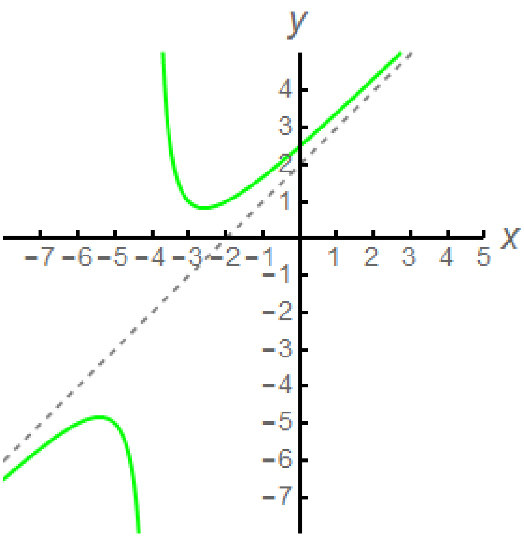
Nullstellen: keine

$\lim\limits_{x \to -4-0} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to -4+0} f(x) = \infty$

$\rightarrow \quad x = -4$ ist Polstelle

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty,$

Asymptote: $y_A = x + 2$



Trigonometrische Funktionen

3.17 (a) $30° = \frac{\pi}{6}, \;\; 120° = \frac{2\pi}{3}, \;\; \frac{\pi}{4} = 45°, \;\; \frac{3\pi}{2} = 270°$

(b) $\sin(30°) = \frac{1}{2}, \;\; \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; \cos(90°) = 0, \;\; \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

3.18

(a)	$\sin(x) = \frac{1}{2}$	für $x = \frac{\pi}{6} = 30°$ und $x = \frac{5\pi}{6} = 150°$
	$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	für $x = \frac{\pi}{3} = 60°$ und $x = \frac{2\pi}{3} = 120°$
(b)	$\cos(x) = \frac{1}{2}$	für $x = -\frac{\pi}{3} = -60°$ und $x = \frac{\pi}{3} = 60°$
	$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	für $x = -\frac{\pi}{6} = -30°$ und $x = \frac{\pi}{6} = 30°$
(c)	$\tan(x) = 1$	für $x = -\frac{3\pi}{4} = -135°$ und $x = \frac{\pi}{4} = 45°$
	$\tan(x) = \sqrt{3}$	für $x = -\frac{2\pi}{3} = -120°$ und $x = \frac{\pi}{3} = 60°$

3.19

$f_1(x)$: Periodenlänge: π, Nullstellen: $x_{N_k} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, Achsensymmetrie

$f_2(x)$: Periodenlänge: π, Nullstellen: $x_{N_k} = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, Punktsymmetrie

$f_3(x)$: Periodenlänge: 2π, Nullstellen: $x_{N_k} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, Punktsymmetrie

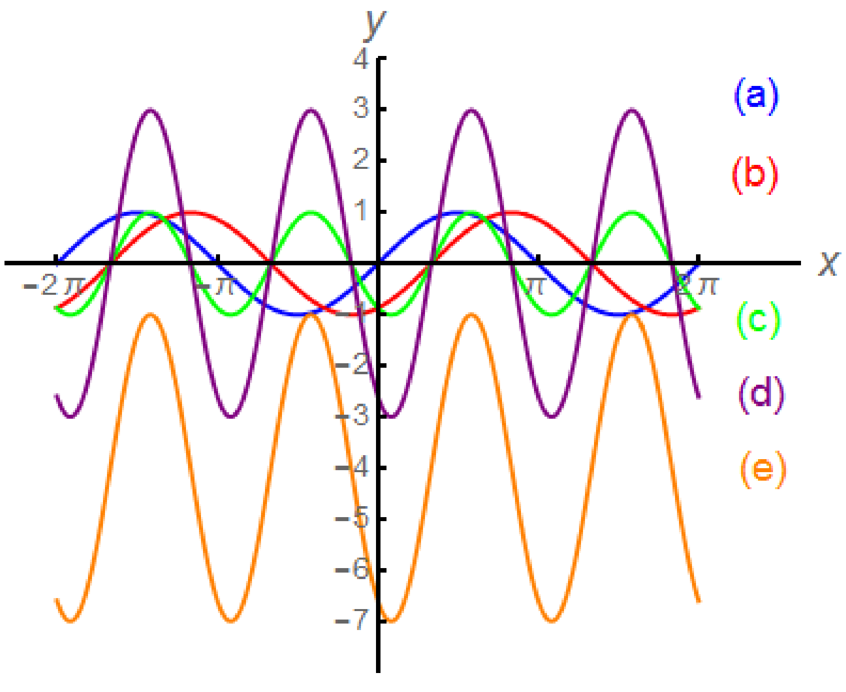
3.20 $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$, wenn k eine beliebige ganze Zahl ist

3.21 (a) $\to$ (b) : Verschiebung um $\frac{\pi}{3}$ in Richtung positiver $x-$Achse

(b) $\to$ (c) : Halbierung der Periodenlänge, d.h. Verdoppelung der Frequenz

(c) $\to$ (d) : Verdreifachung der Amplitude

(d) $\to$ (e) : Verschiebung um 4 in Richtung negativer $y-$Achse



3.22

- c: Verschiebung auf der $x-$Achse (genauer um $\frac{c}{b}$)
- d: Verschiebung auf der $y-$Achse
- a: Veränderung der Amplitude
- b: Veränderung der Periodenlänge

Vermischtes

3.23 (a) falsch, D ist eine Teilmenge der reellen Zahlen, z.B. $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D(f) = [0, \infty)$

(b) wahr

(c) wahr

(d) falsch, da z.B. bei der Funktion $f(x) = x^2$ der Zahl $4 \in W$ die beiden Argumente $x_1 = 2, x_2 = -2 \in D$ zugeordnet werden müssten

(e) falsch, da z.B. bei der Funktion $f(x) = x^2$ die beiden Argumente $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ denselben Funktionswert 4 haben

(f) wahr

(g) falsch, W kann niemals mehr Elemente (Zahlen) enthalten als D

(h) falsch, da z.B. bei der Funktion $f(x) = x^2$ der Zahl $4 \in W$ die beiden Argumente $x_1 = 2, x_2 = -2 \in D$ zugeordnet werden müssten

3.24
(a) $D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(b) $D(f) = (-5, -4) \cup (-4, \infty)$
(c) $D(f) = (-4, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$
(d) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3.25
(a) Tiefpunkt $T(0, -5)$, $W(f) = [-5, \infty)$
(b) Tiefpunkt $T(2, 1)$, $W(f) = [1, \infty)$
(c) Hochpunkt $H(0, 1)$, $W(f) = (0, 1]$
(d) Tiefpunkte $T_k(k \cdot \frac{\pi}{2}, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$ gerade,
Hochpunkte $H_k(k \cdot \frac{\pi}{2}, 1)$ für $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, $W(f) = [0, 1]$
(e) Hochpunkt $H(0, 1)$, $W(f) = (0, 1]$

3.26
(a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, Der Graph nähert sich keiner Geraden an.
(b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$, Der Graph nähert sich der $x-$Achse $y_A = 0$ an.
(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 3$, Der Graph nähert sich der Geraden $y_A = 3$ an.
(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
Der Graph nähert sich der Geraden $y_A = 2x - 3$ an.
(e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0$, Der Graph nähert sich der $x-$Achse $y_A = 0$ an.
(f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 1$, Der Graph nähert sich der Geraden $y_A = 1$ an.

8.4 Lösungen zu Kapitel 4

Ableitungsfunktionen, Ableitungsregeln

4.1
(a) $f'(x) = \cos(x)$
(b) $f'(x) = -\sin(x)$
(c) $f'(x) = e^x$
(d) $f'(x) = nx^{n-1}$
(e) $f'(x) = \frac{1}{x}$

4.2

(a)	$f'(x) = 1 - x + x^2 - x^3$	$f''(x) = -1 + 2x - 3x^2$
(b)	$y'(x) = \cos(x) + 3e^x - 3x^2$	$y''(x) = -\sin(x) + 3e^x - 6x$
(c)	$f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3u^2}$	$f''(u) = -\dfrac{1}{4\sqrt{u^3}} + \dfrac{2}{3u^3}$
(d)	$f'(x) = 2(3+x) - 2x^{-3} + 12x^{-5}$	$f''(x) = 2 + 6x^{-4} - 60x^{-6}$
(e)	$v'(t) = \dfrac{3}{2}t^{1/2} - \dfrac{7}{4}t^{-11/4}$	$v''(t) = \dfrac{3}{4}t^{-1/2} + \dfrac{77}{16}t^{-15/4}$
(f)	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \sin(x)$	$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \cos(x)$

4.3

(a)	$f'(x) = 2(x+1)e^x$	(b)	$f'(x) = \dfrac{6x+1}{2\sqrt{3x^2+x}}$
(c)	$a'(t) = (t^2+2)\cos(t)$	(d)	$f'(x) = \dfrac{-9x^6 + 20x^4 + 6x}{(x^5+1)^2}$
(e)	$f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$	(f)	$f'(s) = 80s(s^2+1)^{39}$
(g)	$f'(x) = \dfrac{2}{2x+3} - 6xe^{-3x^2}$	(h)	$f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$
(i)	$f'(x) = -2x(\sqrt{x}+1)e^{4\sqrt{x}}$	(j)	$f'(x) = 3x\cos(x^3) - \dfrac{\sin(x^3)}{x^2}$

4.4 $f^{(10)}(x) = 10! + 2^{10}e^{2x} = 3628800 + 1024e^{2x}$

4.5

(a)	falsch	(b)	wahr	(c)	falsch	(d)	falsch
(e)	wahr	(f)	falsch	(g)	wahr		

4.6 (b)

4.7 (c)

Anwendung der Differentialrechnung

4.8 $t(x) = 2x - 2$

4.9 $B\left(-100, -\frac{25}{3}\right)$, Höhenunterschied: $\frac{121}{3}$ Längeneinheiten

4.10 Abkühlungsrate zur Zeit $t = 3$ min: $T'(3) \approx -2,59\,°/min$,
Abkühlungsrate zur Zeit $t = 15$ min: $T'(15) \approx -1,57\,°/min$

4.11 momentane Sinkgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ min: $h'(1) = -320\,m/min$

4.12 (a) $c(0) = 81\,\mu g/ml$

(b) $c(9) = 0\,\mu g/ml$

(c) Maximum von $c(t)$ bei $t = \frac{7}{3}$ mit $c\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{4000}{27} \approx 148,15\,\mu g/ml$

(d) Minimum von $c'(t)$ bei $t = \frac{17}{3}$ mit $c'\left(\frac{17}{3}\right) = -\frac{100}{3} \approx -33,33\,(\mu g/ml)/h$

4.13 (a) Tiefpunkt $T(\ln(3), 0)$, Wendepunkt $W\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right), \frac{9}{4}\right)$,
Wendetangente $t(x) = \frac{9}{2}\left(-x + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$

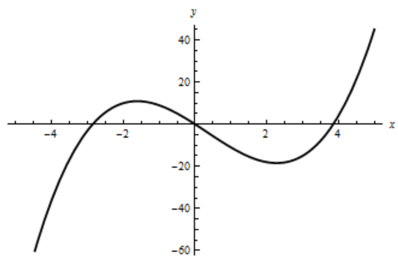
(b) f monoton fallend auf $(-\infty, \ln(3)]$, $\quad f$ monoton wachsend auf $[\ln(3), \infty)$

(c) f konkav auf $\left(-\infty, \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$, $\quad f$ konvex auf $\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right), \infty\right)$

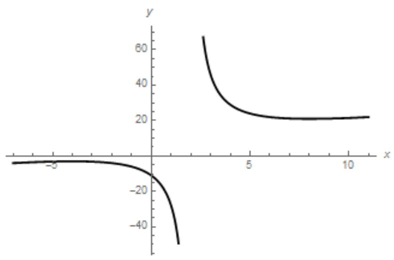
(d) $\lim_{x\to\infty} = 3$ mit Asymptote $y_A = 3$, $\quad \lim_{x\to\infty} = \infty$ ohne Asymptote

4.14 $f(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 = \frac{3}{2}x^2(x+3)$

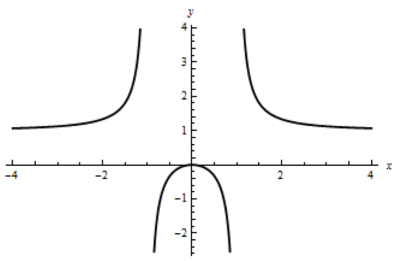
4.15 (a) $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$,
Nullstellen: $x = 0;\ -2,854;\ 3,854$,
$\mathrm{Max}(-1,61; 10,945)$, $\ \mathrm{Min}(2,277; -18,426)$,
$\mathrm{WP}(\frac{1}{3}; -3,741)$,
Monotonie/Krümmung: siehe Graph



(b) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Polstelle: $x = 2$,
keine Nullstellen und Wendepunkte,
$\mathrm{Max}(-4; -3)$, $\ \mathrm{Min}(8; 21)$,
Monotonie/Krümmung: siehe Graph,
Asymptote $y_A = x + 7$ für $x \to \pm\infty$,
$W(f) = (-\infty, -3] \cup [21, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-3, 21)$



(c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, Polstellen: $x = -1;\ 1$,
Nullstelle: $x = 0$, $\mathrm{Max}(0; 0)$,
keine Wendepunkte,
Monotonie/Krümmung: siehe Graph,
Asymptote: $y_A = 1$ für $x \to \pm\infty$,
$W(f) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$



4.16 $x = 100\,m$, $\ y = \frac{100}{\pi} \approx 31,83\,m$

4.17 $r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 3,74\,cm$, $\ h = 2\sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \approx 7,49\,cm$

4.18 $r = h = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \approx 3,09\,dm$

8.5 Lösungen zu Kapitel 5

Stammfunktionen, (Un-)Bestimmte Integrale, Integrationsregeln

Im folgenden sei $C \in \mathbb{R}$.

5.1
(a) $-\cos(x) + C$ (b) $\sin(x) + C$ (c) $e^x + C$
(d) $\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (e) $\ln|x| + C$

5.2
(a) $\frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 10x + C$ (b) $\frac{1}{2}x^2 + 5\ln|x| + \frac{2}{x} + C$
(c) $\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} - \frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^4} - \frac{6}{5}\sqrt{u^5} + C$ (d) $3x - 5e^x + C$
(e) $3\sin(x) + \frac{1}{2}x^4 + C$ (f) $\frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t| + \frac{1}{2t^2} + C$
(g) $3x^3 + 24x - \frac{16}{x} + C$ (h) $ae^x - \frac{b}{3}x^{-3} - c\cos(x) + C$
(i) $e^x + e^{-2}x + C$ (j) $-\frac{3}{8}x^{-\frac{8}{3}} + \frac{15}{23}x^{-\frac{23}{5}} + C$

5.3
(a) wahr, sofern f integrierbar ist (b) wahr
(c) wahr, sofern f integrierbar ist (d) falsch
(e) wahr, sofern f integrierbar ist (f) falsch

5.4
(a) $-5e^{-\frac{1}{5}x} + C$ (b) $-\frac{1}{3}\cos(3x) + C$
(c) $\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C$ (d) $(-x+4)^{-1} + C = \frac{1}{4-x} + C$

5.5 (a) $-\frac{4}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{356}{15}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) 1 (f) $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 2$

5.6 $V = \frac{67\pi}{54} \approx 3,8979,\qquad M = \frac{13\pi}{4} \approx 10,2102$

5.7 (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3+3x)\,\mathrm{d}x = 0$, da der Integrand $f(x) = x^3 + 3x$
eine punktsymmetrische Funktion ist und damit $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} 4\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$, da der Integrand $f(x) = 4\sin(x)$
eine punktsymmetrische Funktion ist und damit $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x^4-x^2+1)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1(2x^4-x^2+1)\,\mathrm{d}x$, da der Integrand $f(x) = 2x^4-x^2+1$
eine achsensymmetrische Funktion ist und damit $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{0}\cos(x)\,\mathrm{d}x$, da der Integrand $f(x) = \cos(x)$
eine achsensymmetrische Funktion ist und damit $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt.

5.8 (a) 3 (b) $e^{-1} - e^{-5}$ (c) $\ln(4)$ (d) $2 + \frac{\ln(3)}{2}$

Anwendung der Integralrechnung

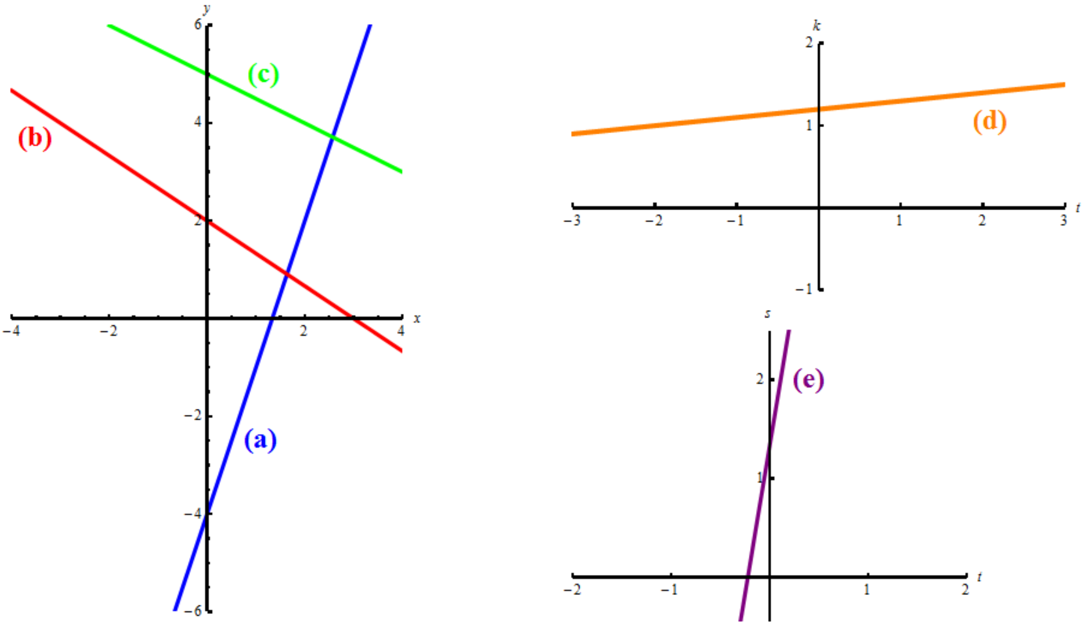
5.9 (a) $\frac{32}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{4}{3}$ **5.10** $\frac{32}{3}$ **5.11** $\frac{128}{27}$

5.12 (a) 1 (b) 8 (c) $\frac{29}{2}$ **5.13** $\frac{19}{6}$

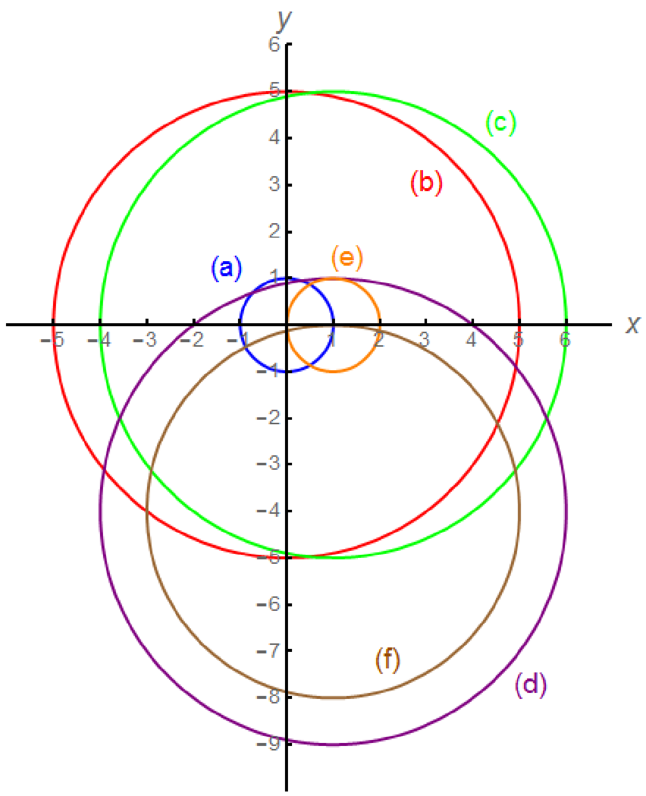
5.14 (a) $s(t) = -1,8 \cdot 10^{-4}t^5 + 0,015t^4 - 0,55t^3 + 9t^2$ (b) 1024m

8.6 Lösungen zu Kapitel 6

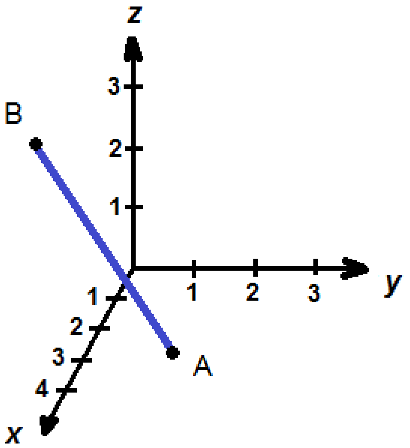
6.1



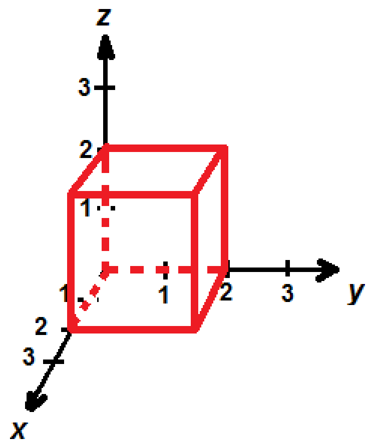
6.2



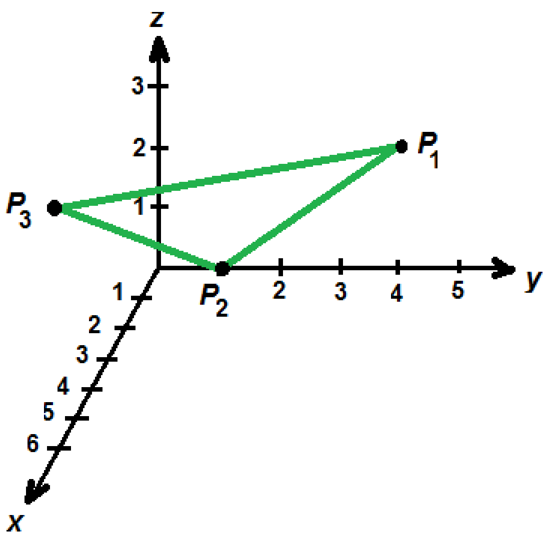
6.3



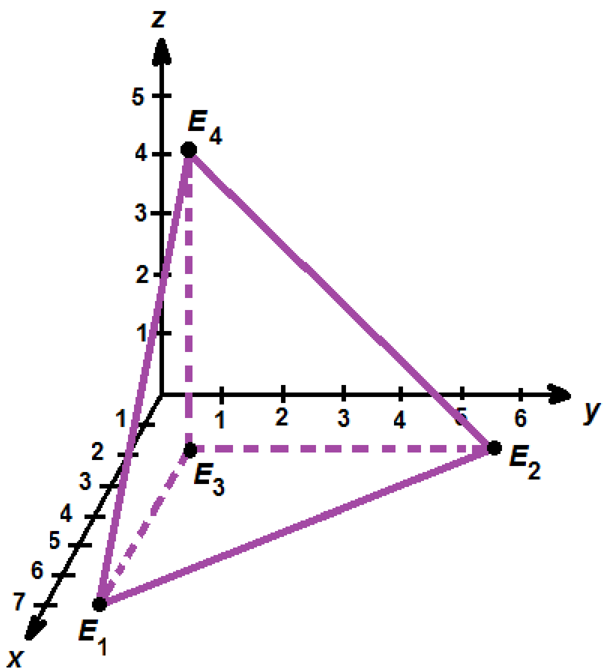
(a)



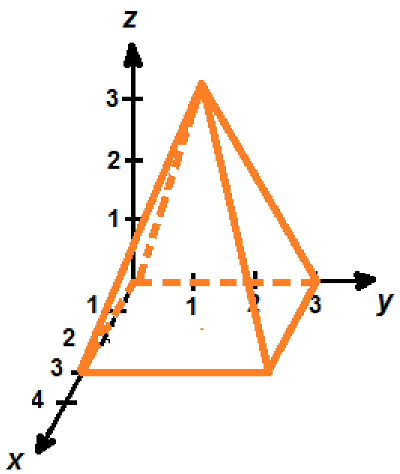
(b)



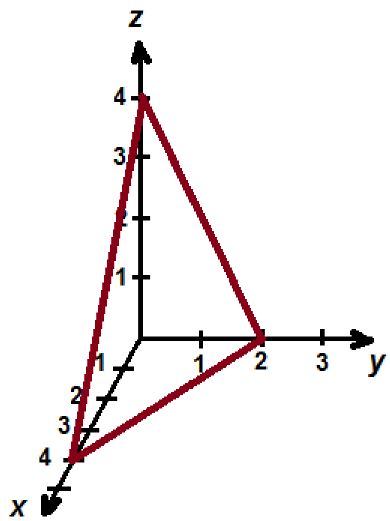
(c)



(d)



(e)



(f)

6.4 (a) Die Summe zweier Nebenwinkel ist 180°.

(b) Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt 180°.

(c) Scheitelwinkel sind gleich groß.

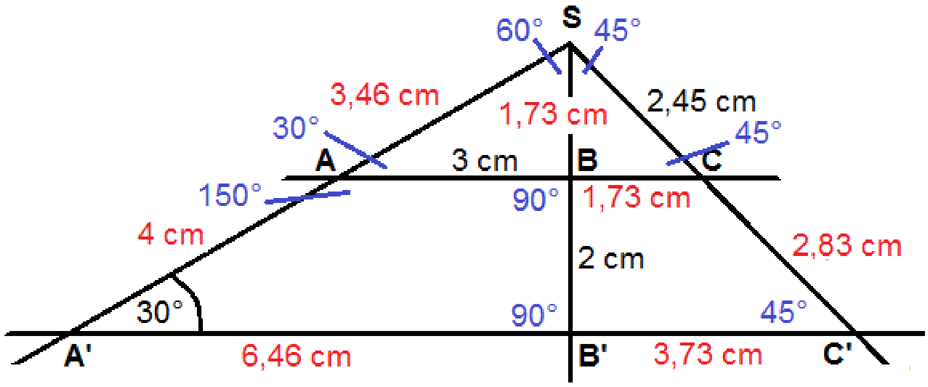
(d) Ein spitzer Winkel ist kleiner als 90°.

(e) Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks beträgt 360°.

(f) Bei 90° spricht man von einem rechten Winkel.

(g) Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.

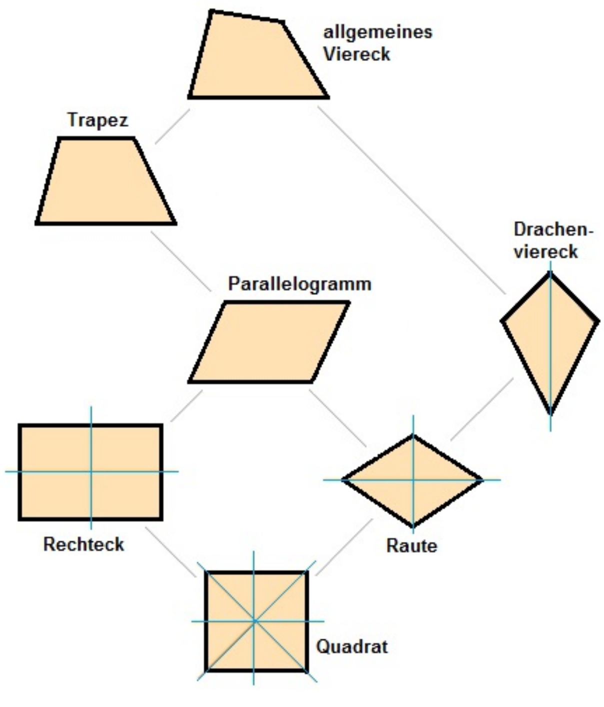
6.5



6.6

Quadrat:	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel, alle Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel betragen 90°.
Rechteck:	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang, alle Innenwinkel betragen 90°.
Raute:	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel, alle vier Seiten sind gleich lang.
Parallelogramm:	Je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel und gleich lang.
Trapez:	Mindestens zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.
Drachenviereck:	Mindestens zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.

Teilmengenbeziehungen:



6.7 Anstiegswinkel $\approx 4,57°$, horizontale Distanz $\approx 1993,63\,m$, vertikale Distanz $\approx 159,49\,m$

6.8 $t \approx 16\,min$

6.9 (a) $V = 176 \cdot 10^6\,cm^3$ (b) $V = 125\pi \cdot 10^6\,cm^3 \approx 3,927 \cdot 10^8\,cm^3$

6.10 (a) $V = \frac{4200-15\pi}{4}\,cm^3 \approx 1038,22\,cm^3$ (b) $A_M = 15\pi\,cm^2 \approx 47,12\,cm^2$

6.11 (a) $h = \frac{32}{2\pi}\,dm \approx 3,395\,dm$ (b) $\frac{5}{2}(9\pi + \sqrt{81\pi^2 + 4096})\,ml \approx 245,6\,ml$

6.12 $m \approx \frac{5,427 \cdot 15329^3}{6\pi^2} \approx 3,3 \cdot 10^{23}\,kg,\quad A_O \approx \frac{15329^2}{\pi} \approx 74795897\,km^2$

6.13 $s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10,89\,mm \approx 9,43\,mm,\quad V = \frac{33\sqrt{3}}{16} \cdot 10,89^2\,mm^3 \approx 423,65\,mm^3$

8.7 Lösungen zu Kapitel 7

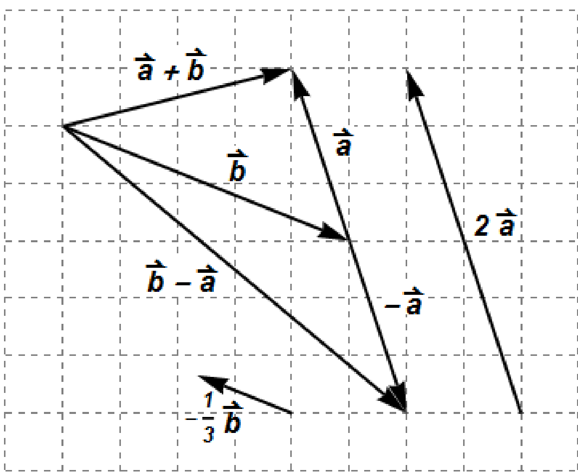
Vektoren und Punkte

7.1
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix},\quad \vec{d} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{e} = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix},$$
$$\vec{f} = \begin{pmatrix}3/2\\2\end{pmatrix},\quad \vec{g} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{h} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\quad \vec{i} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

- gleich: $\vec{a} = \vec{g},\ \vec{b} = \vec{d}$
- zueinander entgegengesetzt: $\vec{e} = -\vec{a}$
- dieselbe Richtung: $\vec{a}, \vec{e}, \vec{g}, \vec{h}$ (wobei $\vec{e}$ entgegengesetzte Orientierung zu den anderen drei hat), sowie $\vec{b}, \vec{d}$ und $\vec{f}, \vec{i}$
- denselben Betrag: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = |\vec{e}| = |\vec{g}|$ sowie $|\vec{c}| = |\vec{h}|$

7.2 (a) $2\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix},\ -\frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix},\ \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\ \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$

(b)

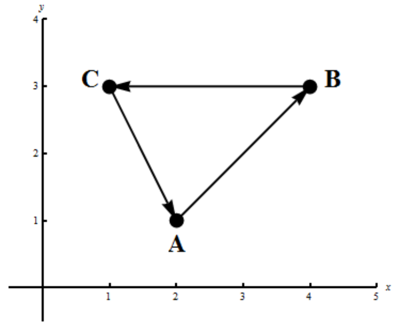


(c) $|\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{61}$ - Länge des Differenzvektors $\vec{b}-\vec{a}$

(d) $\vec{a} \circ \vec{b} = -11$

(e) $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}}\right) \approx 130,24°$

7.3



(b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$

(c) $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71,57°$

$\measuredangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right) = \arccos\left(\frac{6}{2\sqrt{2}\cdot 3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

$\measuredangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{5}\cdot 3}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63,43°$

7.4 (a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 34 \end{pmatrix}$

(b) $|\vec{a}| = \sqrt{29}, \ |\vec{b}| = \sqrt{41}, \ |\vec{c}| = \sqrt{10}$

(c) $\vec{a} \circ \vec{b} = 24$

(d) $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{41}}\right) \approx 45,89°$

7.5 (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$ABCD$ ist ein Parallelogramm, da $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, d.h. die gegenüberliegenden Seiten sind parallel und gleich lang.

(b) $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90°$, $ABCD$ ist ein Rechteck

(c) $d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{5}$

7.6 (a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ -16 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und bildet mit ihnen in der Reihenfolge $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem.

(c) $\vec{d} = -\vec{c}$

(d) $\vec{e}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, da $\vec{e}$ ein Vielfaches von $\vec{c}$ ist.

Geraden und Ebenen

7.7 (a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $g_1 : \ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}, \ r \in \mathbb{R},$

$g_2 : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}$

7.8 (a) g_1 und g_3 schneiden sich im Punkt $S\left(1, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(b) g_2 und g_3 sind weder parallel noch schneiden sie sich. Folglich sind sie windschief.

7.9 (a) $E : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s, t \in \mathbb{R}$ (b) $E : \ -4x + y + 12z = 1$

7.10 (a) nein (b) $S(5, -3, 2)$

7.11 E_1 und E_2 schneiden sich in der Geraden $g : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -35 \\ -20 \\ 26 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}.$