Grundlagen der Stochastik

Das vorliegende Skript wurde im Original mit dem Programmsystem *MATHEMATICA*® von *WOLFRAM*-Research [http://www.wolfram.com] geschrieben und erstmals auf den Webseiten der Hochschule für Technik und Wirtschaft in Dresden (University of Applied Sciences) [http://www.htw-dresden.de] veröffentlicht. Die Schrift trägt den Charakter eines Arbeitskonzepts, so dass ich für Hinweise und Anregungen aller Art, einschließlich zu Rechtschreibung, Grammatik und Druckbild sehr dankbar bin.
Mit meinem Beitrag erhebe ich keinen Anspruch auf irgendeine Vollständigkeit bzw. Allgemeingültigkeit. Ich möchte einzig und allein an exemplarischen Problemstellungen der Baumechanik logisch einfache mathematisch-physikalische Lösungsmethoden zur Diskussion stellen.

Mirko Slavik, Dresden

10 Momente, Korrelation

10.1 Die uns aus der beschreibenden Statistik bekannten Definitionen des *Mittelwertes (7.3)* sowie der *Varianz (7.8)* können verallgemeinert werden, indem man die *(gewöhnlichen) Momente* m_α einführt. Mit der Erweiterung von *(7.3)* um einen ganzzahligen, positiven Exponenten erhält man das *α-te Moment* der Stichprobe bzw. Zufallsgröße *X.* Es gilt:

$$m_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \quad \text{und somit} \quad m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \simeq ewx.$$

10.2 Das *nullte Moment* entspricht dem Maximalwert der empirischen Verteilungsfunktion, also der relativen Summenhäufigkeit mit dem Wert *Eins* (vgl. hierzu auch *Absatz (8.8, Gl.3)*). Der Mittelwert *ewx* ist dem *ersten Moment* gleichgesetzt. Damit die Momente vom Koordinatenursprung der jeweiligen Merkmalsachse unabhängig werden, wurden die *Zentralmomente* zm_α eingeführt. Ihre Definition lautet:

$$zm_\alpha = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - ewx)^\alpha$$

10.3 Für $\alpha = 0$ wird der Ausdruck wieder *Eins,* womit kein Widerspruch zu *(10.1)* auftritt. Ein Exponent $\alpha = 1$ bewirkt den Wert *Null*. Also machen erst Exponenten $\alpha \geqslant 2$ einen Sinn. Das *zweite Zentralmoment* entspricht formal der empirischen *Varianz (7.8)*:

$$zm_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - ewx)^2 \simeq sx^2$$

10.4 Da die Wahrscheinlichkeitsrechnung weitgehend auf der fundamentalen Grenzwertbildung $n \to \infty$ (siehe *Abschnitt 6* bzw. *7*) basiert, ist es an dieser Stelle notwendig, den in der Wahrscheinlichkeitstheorie üblichen Begriff des *Erwartungswertes EW{g(vekX)}* einer Funktion *g(vekX)* einzuführen (vgl. *Absatz 9.6*)*.* Er hebt die obigen Ausdrücke der gewöhnlichen und der Zentralmomente auf eine höhere Abstraktionsstufe. Sie werden demgemäß als spezielle Erwartungswerte betrachtet.

10.5 Auf die diskreten Ansätze angewandt (siehe *Absatz 8.14*), lauten die Erwartungswertdefinitionen für das arithmetische Mittel (Mittelwert) sowie die Varianz:

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \quad \to \quad m_1 = EW\{X\} = \sum_{i=0}^{n} x_i\, p_X(x_i) \simeq ewx$$

$$zm_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - ewx)^2 \quad \to \quad zm_2 = EW\{(X - EW\{X\})^2\} \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_i - ewx)^2\, p_X(x_i) \simeq sx^2$$

Anmerkung zum Mittelwert:

Ausgehend von $m_1 \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} x_i \simeq \sum_{i=1}^{n} h_i x_i$ erhält man mit $n \to \infty$ schließlich $m_1 \simeq \sum_{i=1}^{n} p_X(x_i)\, x_i$.

Anmerkungen zum Erwartungswert der Standardabweichung:

Es gilt in Analogie zu den Flächenmomenten in der Technischen Mechanik (siehe [10, *Abschnitt 17*] der STEINERsche Verschiebungssatz (Jakob STEINER (1796 - 1863), schweizerischer Mathematiker) mit

$$zm_2 = EW\{(X - EW\{X\})^2\} = EW\{X^2\} - (EW\{X\})^2 \simeq sx^2 .$$

Dieser Sachverhalt lässt sich am diskreten Fall relativ einfach ableiten. Wir schreiben

$$zm_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - ewx)^2 \simeq \sum_{i=1}^{n} (x_i - ewx)^2\, p_X(x_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_X(x_i) - \sum_{i=1}^{n} 2\,\mathrm{ewx}\; x_i\, p_X(x_i) + \sum_{i=1}^{n} ewx^2\, p_X(x_i) =$$

$$EW\{X^2\} - 2\, ewx\, ewx + \mathrm{ewx}^2 = EW\{X^2\} - (EW\{X\})^2 \quad q. e. d. .$$

10.6 Anhand einer numerischen Simulation werden die Wechselbeziehungen sowohl zwischen diskret-statistischer und wahrscheinlichkeitstheoretischer als auch zwischen dem allgemeinen Ansatz und der Methode mittels STEINERschem Verschiebungssatz aufgezeigt . Man vergleiche hierzu auch die Anmerkung zu *Absatz 7.8* bezüglich der Terme *"n"* bzw. *"n-1"*.

```
n = 10^2; stichprobe = Table[Random[Real, {3, 27}], {i, 1, n}]; ewx = Mean[stichprobe];
{sx_mathmatica == StandardDeviation[stichprobe],

 sx_nummerisch1 == Sqrt[Sum[(stichprobe[[i]] - ewx)^2, {i, 1, n}] / (n - 1)],

 sx_nummerisch2 == Sqrt[Sum[(stichprobe[[i]] - ewx)^2, {i, 1, n}] / n],

 sx_STEINER == Sqrt[Sum[(stichprobe[[i]])^2, {i, 1, n}] / n - ewx^2]}
```

```
{sx_mathmatica == 7.42437, sx_nummerisch1 == 7.42437,
 sx_nummerisch2 == 7.38715, sx_STEINER == 7.38715}
```

10.7 Gemäß *(8.10)* können *(10.1)* bzw. *(10.5)* ohne Weiteres auf stetige und quasistetige Verteilungen angewendet werden. Dann gilt

$$m_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha f_X(x)\, dx \simeq EW\{X^\alpha\}$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 f_X(x)\, dx \simeq ewx \simeq EW\{X\} .$$

10.8 Der Mittelwert *ewx* ist der Erwartungswert der Funktion *g(X) = X*, also *EW{g(X)} ≃ EW{X}*. Für das zentrale Moment zweiter Ordnung schreibt man folglich:

$$zm_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 f_X(x)\, dx \simeq EW\{(X - EW\{X\})^2\}$$

10.9 Vom Standpunkt der verallgemeinerten Funktionen bereitet es keine Probleme entsprechend der *Beziehungen (10.7)* auch die Erwartungswerte einer diskreten Verteilung, wie die der POISSONverteilung, zu berechnen (vgl. *Absatz 8.18*). Am unten angeführten Beispiel erkennen wir übrigens die Bedeutung des Parameters λ. Er repräsentiert den Mittelwert der POISSONverteilung, der bemerkenswerterweise auch mit derer Varianz identisch ist.

$\lambda = 5.4321;$ k = 50;

$$\text{Grid}\Big[\Big\{\Big\{\text{"Mittelwert EW\{X\}: "}, \int_0^k \sum_{i=0}^{k} i\,\frac{\lambda^i}{i!}\,e^{-\lambda}\,\text{DiracDelta}[u-i]\,du\Big\},$$

$$\Big\{\text{"Varianz EW\{(X-EW[X])}^2\text{\}: "},$$

$$\int_{-100}^k \sum_{i=0}^{k} i^2\,\frac{\lambda^i}{i!}\,e^{-\lambda}\,\text{DiracDelta}[u-i]\,du - \int_{-100}^k \sum_{i=0}^{k} 2\,i\,\text{ewx}\,\frac{\lambda^i}{i!}\,e^{-\lambda}\,\text{DiracDelta}[u-i]\,du +$$

$$\int_{-100}^k \sum_{i=0}^{k} \text{ewx ewx}\,\frac{\lambda^i}{i!}\,e^{-\lambda}\,\text{DiracDelta}[u-i]\,du\Big\},$$

$$\Big\{\text{"Test über STEINER, Varianz EW\{(X-EW[X])}^2\text{\}: "},$$

$$\left(\int_0^k \sum_{i=0}^{k} i^2\,\frac{\lambda^i}{i!}\,e^{-\lambda}\,\text{DiracDelta}[u-i]\,du\right) - \text{ewx}^2\Big\}\Big\}, \text{Alignment} \to \text{Left}\Big]$$

Mittelwert EW{X}:	5.4321
Varianz EW{(X-EW[X])^2}:	5.4321
Test über STEINER, Varianz EW{(X-EW[X])^2}:	5.4321

10.10 Als zweites Beispiel zeigen wir die Vorgehensweise anhand einer Normalverteilung.

ewx = 3.1234; sx = .6789;

$$\text{Grid}\Big[\Big\{\Big\{\text{"Mittelwert EW\{X\}: "}, \text{ewx} = \int_{-100}^{+100} x\,\frac{1}{\text{sx}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left(\frac{x-\text{ewx}}{\text{sx}}\right)^2}{2}}\,dx\Big\},$$

$$\Big\{\text{"Varianz EW\{(X-EW[X])}^2\text{\}: "}, \text{var} = \int_{-100}^{+100} (x-\text{ewx})^2\,\frac{1}{\text{sx}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left(\frac{x-\text{ewx}}{\text{sx}}\right)^2}{2}}\,dx\Big\},$$

$$\Big\{\text{"Standardabweichung sx: "}, \sqrt{\text{var}}\Big\}\Big\}, \text{Alignment} \to \text{Left}\Big]$$

Mittelwert EW{X}:	3.1234
Varianz EW{(X-EW[X])^2}:	0.460905
Standardabweichung sx:	0.6789

10.11 Betrachten man die Fläche, die unter der Verteilungsdichte einer stetigen Zufallsgröße aufgespannt wird, vom Gesichtspunkt der Baumechanik, dann entspricht der Mittelwert dem Flächenschwerpunkt und die Varianz dem axialen Flächenmoment zweiten Grades (vgl. [10, *Abschnitt 17*]).

10.12 Wir wollen jetzt den Begriff der *Korrelation* $m_{11} \simeq EW\{X_1 X_2\}$ zweier Zufallsgrößen X_1 und X_2 kennen lernen. Hierfür werden die obigen Definitionen für die gewöhnlichen und zentralen Momente formal erweitert. Es gilt:

$$m_1 \simeq EW\{X_1\} \simeq m_{10},\; m_1 \simeq EW\{X_2\} \simeq m_{01},\; m_2 \simeq EW\{X_1^2\} \simeq m_{20},\; m_2 \simeq EW\{X_2^2\} \simeq m_{02}$$
$$\Longrightarrow \quad m_{11} \simeq EW\{X_1 X_2\}$$

$$zm_2 \simeq EW\{(X_1 - EW\{X_1\})^2\} \simeq zm_{20} = m_{20} - m_{10}^2,$$
$$zm_2 \simeq EW\{(X_2 - EW\{X_2\})^2\} \simeq zm_{02} = m_{02} - m_{01}^2$$
$$\Longrightarrow \quad zm_{11} \simeq EW\{(X_1 - EW\{X_1\})(X_2 - EW\{X_2\})\}$$
$$= EW\{X_1 X_2\} - EW\{X_1\, EW\{X_2\}\} - EW\{EW\{X_1\}\, X_2\} + EW\{EW\{X_1\}\, EW\{X_2\}\}$$
$$= EW\{X_1 X_2\} - EW\{X_1\}\, EW\{X_2\} = m_{11} - m_{10}\, m_{01}\,.$$

10.13 Den Ausdruck $zm_{11} \simeq EW\{X_1 X_2\} - EW\{X_1\}\, EW\{X_2\}$ bezeichnet man als *Kovarianz.* Fehlt noch die Definition des *Korrelationskoeffizienten* der beiden Zufallsvariablen. Sie lautet:

$$korr_{11} = zm_{11}\,(zm_{20}\; zm_{02})^{-0.5}, \text{ mit } |korr_{11}| \leqslant 1\,.$$

10.14 Die beiden Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind unkorreliert, wenn der Korrelationskoeffizient, sprich die Kovarianz Null wird. Dann gilt für die Korrelation m_{11}:

$$EW\{X_1 X_2\} = EW\{X_1\}\, EW\{X_2\}\,.$$

10.15 Unabhängige Zufallsgrößen sind stets unkorreliert. Der Zufallsvektor kann einer beliebigen Verteilungsfunktion genügen. Die Umkehrung der Aussage, dass unkorrelierte Größen stets stochastisch unabhängig sind, gilt aber nicht, außer im Falle einer zweidimensionalen Normalverteilung. Hier folgt aus der Unkorreliertheit die Unabhängigkeit von X_1 und X_2 [7, S.72]. Der Fall $|korr_{11}| = 1$ hingegen beschreibt den Zustand einer extremen (linearen) Abhängigkeit zweier Zufallsgrößen. Hier gilt die Umkehrung. Man vergleiche hierzu die *Absätze 8.28 ff.*.

Anmerkung: Die Beweise zu den Aussagen von *(10.14)* und *(10.15)* sind außerordentlich anschaulich in [11] dargestellt. Zu ihrem Verständnis benötigt man jedoch u. a. die Kenntnisse des *Abschnittes 9* über Funktionen von Zufallsvariablen. Es sei aber auch auf den *Absatz 10.18* verwiesen.

10.16 Wir untersuchen gemäß [11] zwei Zufallsvariable X_1 und X_2, deren gemeinsame Verteilungsdichte bekannt sei:

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) == \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 2 x_2^2}{2}}$$

10.17 Zuerst wird getestet, ob diese Funktion tatsächlich eine Dichte repräsentiert. Im Anschluss erfolgt die Berechnung der gewöhnlichen und zentralen Momente, sowie des Korrelationskoeffizienten.

$$\text{Print}\left[\text{"Test auf positiv Eins: ", } \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2\right]$$

$$\text{Print}\left[\text{"}m_{10}\text{ = ", } m_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x1\, \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2,\right.$$
$$\text{", }m_{01}\text{ = ", } m_{01} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x2\, \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2,$$
$$\text{", }m_{11}\text{ = ", } m_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x1\, x2\, \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2,$$
$$\text{", }zm_{11}\text{ = ", } zm_{11} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x1-m_{10})\,(x2-m_{01})\, \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2,$$
$$\text{", }zm_{20}\text{ = ", } zm_{20} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x1-m_{10})^2\, \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2,$$
$$\text{", }zm_{02}\text{ = ", } zm_{02} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x2-m_{01})^2\, \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x1^2-2\,x1\,x2+2\,x2^2}{2}}\, dx1\, dx2,$$
$$\left.\text{", }korr_{11}\text{ = ", } \frac{zm_{11}}{\sqrt{zm_{20}\, zm_{02}}}\right]$$

```
Test auf positiv Eins:  1
```

$$m_{10} = 0,\; m_{01} = 0,\; m_{11} = 1,\; zm_{11} = 1,\; zm_{20} = 2,\; zm_{02} = 1,\; korr_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.18 Wir kommen nochmals auf die Aussagen zur stochastischen Abhängigkeit der *Absätze 10.13* und *10.14* zurück. Dazu wird die Zufallsfunktion $Y = m\,X + b$ des *Absatzes 9.4* betrachtet. Gemäß *Absatz 8.32* lautet die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{X,Y}(x,y)$ der linear abhängigen Zufallsvariablen X und Y

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y,X}(y|x) = f_Y(y) \cdot f_{X,Y}(x|y)$$

mit den bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten

$$f_{Y,X}(y|x) = \delta\,(y - (mx+b)\,) \quad \text{bzw.} \quad f_{X,Y}(x|y) = \delta\,(x - (\tfrac{y-b}{m})\,)\,.$$

```
ewx = 1.234; sx = 2.345; m = 3.456; b = -2.345;
```

$$fx = \frac{1}{sx\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\left(\frac{x-ewx}{sx}\right)^2}{2}};\; fyx = \text{DiracDelta}[y - (m\,x + b)];$$

$$\text{Print}\left[\text{"Test auf positiv Eins für } f_{yx}\text{: ", } \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} \text{fx fyx } dx\, dy \text{ // N}\right]$$

$$\text{Print}\Big[\text{"}m_{10} = \text{", } m_{10} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} x \text{ fx fyx } dx\, dy \text{ // N, ", } m_{01} = \text{",}$$
$$m_{01} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} y \text{ fx fyx } dx\, dy \text{ // N, ", } m_{11} = \text{", } m_{11} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} x\, y \text{ fx fyx } dx\, dy \text{ // N}\Big]$$

$$\text{Print}\Big[\text{"}zm_{11} = \text{", } zm_{11} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (x - m_{10})\,(y - m_{01}) \text{ fx fyx } dx\, dy \text{ // N,}$$
$$\text{", } zm_{20} = \text{", } zm_{20} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (x - m_{10})^2 \text{ fx fyx } dx\, dy \text{ // N,}$$
$$\text{", } zm_{02} = \text{", } zm_{02} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (y - m_{01})^2 \text{ fx fyx } dx\, dy \text{ // N,}$$
$$\text{", } korr_{11} = \text{", } \frac{zm_{11}}{\sqrt{zm_{20}\, zm_{02}}}\Big]$$

```
Test auf positiv  Eins  für  fyx:  1.
```

m_{10} = 1.234, m_{01} = 1.9197, m_{11} = 21.3735

zm_{11} = 19.0046, zm_{20} = 5.49903, zm_{02} = 65.68, $korr_{11}$ = 1.

$$fy = \text{Abs}\left[\frac{1}{m}\right] \frac{1}{sx\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{\frac{y-b}{m} - ewx}{sx}\right)^2}{2}}\text{; } fxy = \text{DiracDelta}\left[x - \frac{y-b}{m}\right]\text{;}$$

$$\text{Print}\left[\text{"Test auf positiv Eins für } f_{xy}\text{: ", } \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} \text{fxy fy } dx\, dy \text{ // N}\right]$$

$$\text{Print}\Big[\text{"}m_{10} = \text{", } m_{10} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} x \text{ fxy fy } dx\, dy \text{ // N, ", } m_{01} = \text{",}$$
$$m_{01} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} y \text{ fxy fy } dx\, dy \text{ // N, ", } m_{11} = \text{", } m_{11} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} x\, y \text{ fxy fy } dx\, dy \text{ // N}\Big]$$

$$\text{Print}\Big[\text{"}zm_{11} = \text{", } zm_{11} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (x - m_{10})\,(y - m_{01}) \text{ fxy fy } dx\, dy \text{ // N,}$$
$$\text{", } zm_{20} = \text{", } zm_{20} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (x - m_{10})^2 \text{ fxy fy } dx\, dy \text{ // N,}$$
$$\text{", } zm_{02} = \text{", } zm_{02} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (y - m_{01})^2 \text{ fxy fy } dx\, dy \text{ // N,}$$
$$\text{", } korr_{11} = \text{", } \frac{zm_{11}}{\sqrt{zm_{20}\, zm_{02}}}\Big]$$

```
Test auf positiv  Eins  für  fxy:  1.
```

```
m10 = 1.234, m01 = 1.9197, m11 = 21.3735
```

```
zm11 = 19.0046, zm20 = 5.49903, zm02 = 65.68, korr11 =  1.
```

10.19 Die obige Berechnung bestätigt sowohl die Äquivalenz der beiden Ansätze für die Verbundwahrscheinlichkeit sowie die Übereinstimmung mit den im *Absatz 9.5* ausgewiesenen Momenten als auch den erwarteten Korrelationskoeffizient $|korr_{11}| = 1$.

10.20 Wir bleiben bei demselben Beispiel, doch behaupten jetzt, die beiden Variablen X und Y seien voneinander unabhängig. Dies bedeutet, der Korrelationskoeffizient muss nun Null werden, was unten seine rechnerische Bestätigung findet. Für die Verbundverteilungsdichte unabhängiger Zufallsgrößen gilt gemäß *Absatz 8.32*

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y,X}(y \backslash x) = f_Y(y) \cdot f_{X,Y}(x \backslash y) \equiv f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

mit den bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten

$$f_{yx}(y \backslash x) = f_y(y) \quad \text{bzw.} \quad f_{xy}(x \backslash y) = f_x(x) \,.$$

$$\texttt{ewx} = 1.234;\ \texttt{sx} = 2.345;\ \texttt{m} = 3.456;\ \texttt{b} = -2.345;$$

$$\texttt{fx} = \frac{1}{\texttt{sx}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\left(\frac{x-\texttt{ewx}}{\texttt{sx}}\right)^2}{2}};\ \texttt{fy} = \texttt{Abs}\left[\frac{1}{\texttt{m}}\right] \frac{1}{\texttt{sx}\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\left(\frac{\frac{y-b}{m}-\texttt{ewx}}{\texttt{sx}}\right)^2}{2}};$$

$$\texttt{Print}\Big[\texttt{"}m_{10} = \texttt{"},\ m_{10} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} x\ \texttt{fx}\ \texttt{fy}\, dx\, dy\ \texttt{// N},\ \texttt{", }m_{01} = \texttt{"},$$
$$m_{01} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} y\ \texttt{fx}\ \texttt{fy}\, dx\, dy\ \texttt{// N},\ \texttt{", }m_{11} = \texttt{"},\ m_{11} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} x\, y\ \texttt{fx}\ \texttt{fy}\, dx\, dy\ \texttt{// N}\Big]$$
$$\texttt{Print}\Big[\texttt{"}zm_{11} = \texttt{"},\ zm_{11} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (x - m_{10})\ (y - m_{01})\ \texttt{fx}\ \texttt{fy}\, dx\, dy\ \texttt{// N},$$
$$\texttt{", }zm_{20} = \texttt{"},\ zm_{20} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (x - m_{10})^2\ \texttt{fx}\ \texttt{fy}\, dx\, dy\ \texttt{// N},$$
$$\texttt{", }zm_{02} = \texttt{"},\ zm_{02} = \int_{-100}^{100}\int_{-100}^{100} (y - m_{01})^2\ \texttt{fx}\ \texttt{fy}\, dx\, dy\ \texttt{// N},$$
$$\texttt{", }korr_{11} = \texttt{"},\ \frac{zm_{11}}{\sqrt{zm_{20}\ zm_{02}}}\Big]$$

```
m10 = 1.234, m01 = 1.9197, m11 = 2.36891
```

```
zm11 = 0., zm20 = 5.49903, zm02 = 65.68, korr11 =  0.
```