

Spannung und Verformung in der Baumechanik

Eine Einführung in die Festigkeitslehre mit *Mathematica*®

Das vorliegende Skript wurde im Original mit dem Programmsystem *MATHEMATICA*® von *WOLFRAM*-Research [http://www.wolfram.com] geschrieben und erstmals auf den Webseiten der Hochschule für Technik und Wirtschaft in Dresden (University of Applied Sciences) [http://www.htw-dresden.de] veröffentlicht. Die Schrift trägt den Charakter eines Arbeitskonzepts, so dass ich für Hinweise und Anregungen aller Art, einschließlich zu Rechtschreibung, Grammatik und Druckbild sehr dankbar bin.

Mit meinem Beitrag erhebe ich keinen Anspruch auf irgendeine Vollständigkeit bzw. Allgemeingültigkeit. Ich möchte einzig und allein an exemplarischen Problemstellungen der Baumechanik logisch einfache mathematisch-physikalische Lösungsmethoden zur Diskussion stellen.

■ 18 Einachsige Biegung mit Normalkraft

18.1 Zunächst werden prismatische Stäbe mit wenigstens einfachsymmetrischen Querschnitten betrachtet, die allein unter dem Einfluß äußerer Momente M_a stehen. Diese Momente wirken in einer Lastebene, in der sich auch die Symmetrieachse der Stabquerschnitte befindet (*Bild 18.1*). Die Lastebene fällt folglich mit einer Hauptachse des Querschnittes zusammen (vgl. Absatz 17.17), was als eine notwendige Bedingung einer einachsigen Beanspruchung angesehen werden muss. Wenn $M_{a,links} = M_{a,rechts}$ gilt, sprechen wir von einer reinen Biegung. Es werden weder horizontale noch vertikale Reaktionskräfte geweckt. Die Lagerkörper in den Punkten a und b dienen der eindeutigen statischen bzw. kinematischen Fixierung des Balkens (vgl. hierzu die uneindeutige Lagerung beim Ziehharmonika-Modell des *Bildes 18.4*).

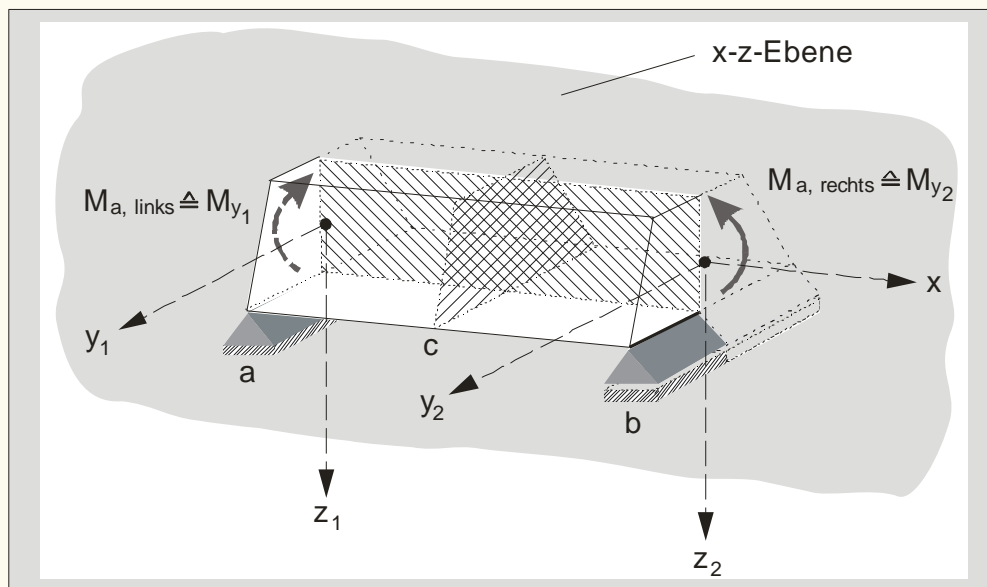


Bild 18.1: Prismatischer Stab unter reiner Biegung (Prinzipiskizze)

18.2 Auch wenn die reine, querkraft- und normalkraftfreie Biegung in der Baustatik nur ein kleines Anwendungsspektrum besitzt, ist ihre separate Untersuchung gerechtfertigt. Die Idealisierungen der reinen Biegung können aufgrund der Prinzipien der Technischen Biegelehre sowohl zur Analyse bei einer exzentrischen axialen Belastung (vgl. *Bild 6.16 b*) als auch bei der in der praktischen Baustatik allgemein üblichen Querkraftbiegung genutzt werden (*Bild 18.2*).

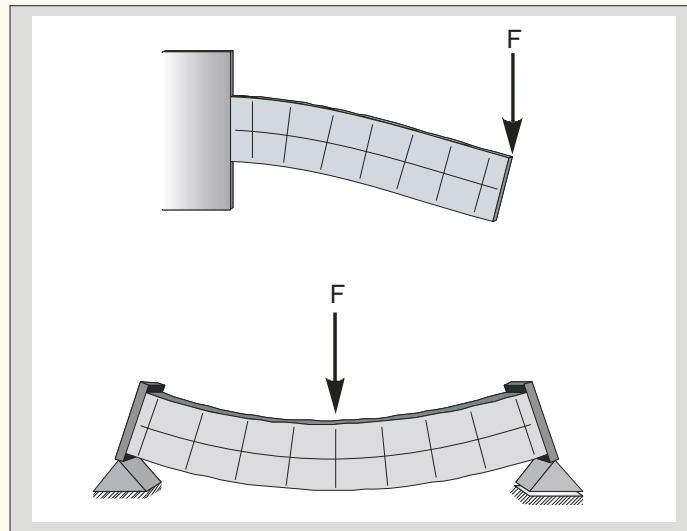


Bild 18.2: Biegebalken mit idealisierten Verformungsebenen

18.3 Die Verformungen der obigen Balken, stellen die grafische Wiedergabe realer Balkenmodelle dar. Wir erkennen, dass die gegenüberliegenden oberen und unteren Randfasern entweder gezogen bzw. gestaucht werden. Folglich muss zwischen ihnen eine Faserschicht existieren, die nicht verändert wird.

18.4 Die experimentellen Untersuchungen haben bestätigt, dass die Querschnitte gerader Stababschnitte innerhalb der Betrachtungsgrenzen der linearen Theorie (siehe Kapitel 5) im verformten Zustand eben und senkrecht zur verformten Stabachse bleiben (Bild 18.2). Diese beiden Grundannahmen werden in der Technischen Biegelehre als *Ebenen- und Normalenhypothese* ausgewiesen. Deshalb können wir in Analogie zu Bild 6.17 auch ein Ziehharmonikamodell der Biegung (Bild 18.4) kreieren.

Anmerkung: Der Leser beachte bitte den Widerspruch zwischen dem im Bild 18.4 b dargestellten Verformungsbild und der Annahme einer reinen Biegung. Infolge der fehlenden Fixpunkte (vgl. Absatz 18.1) lässt sich beim Betätigen einer realen Ziehharmonika durch einen Menschen eine reine Biegung nur sehr schwer realisieren. Die Überlagerung der Biegeverformung mit einer Normalkraftwirkung ist in der Regel unvermeidlich.

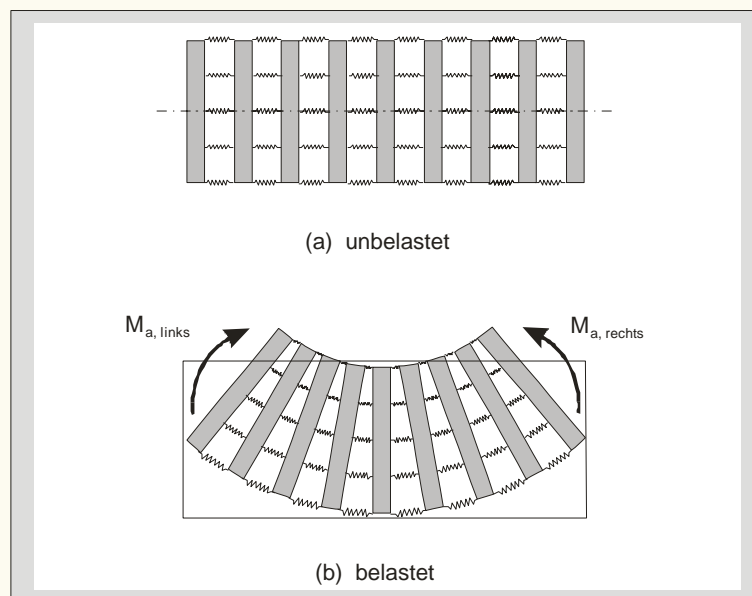


Bild 18.4: Modell "Ziehharmonika" für einen Biegebalken

18.5 Wir kehren zum Einfeldbalken zurück (Bild 18.5). Mittels eines Rundschnitts durch das Stabelement \bar{ab} erzeugen wir das Teilsystem \bar{ac} . Die elementaren Teilkräfte am Querschnitt c-c (vgl. hierzu

auch *Bild 18.8*) müssen einzig und allein ein inneres Schnittmoment M_y bilden, das im Gleichgewicht mit dem äußeren Moment $M_{a, links}$ steht. Dieses innere Moment rekrutiert sich aus einer resultierenden inneren Druckkraft D_{innen} und deren Gegenspielerin der resultierenden inneren Zugkraft Z_{innen} . Beide sind über den gemeinsamen Hebelarm z_{innen} (*Bild 18.5*) verknüpft:

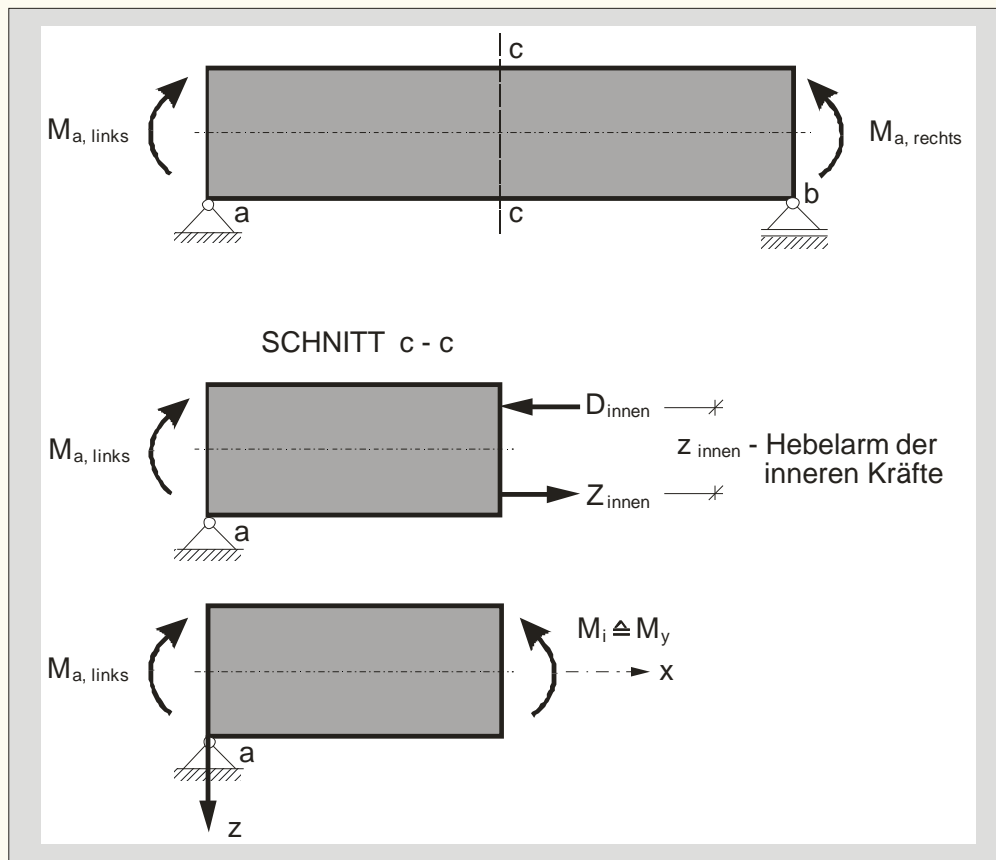


Bild 18.5 : Innere Schnittmoment (idealisierte Darstellung in der $x - z -$ Ebene)

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0 \rightarrow 0 = D_{innen} - Z_{innen} \Leftrightarrow M_y \cong M_i \cong D_{innen} z_{innen} \cong Z_{innen} z_{innen}$$

18.6 Da die Biegemomente M_y längs des prismatischen Stabes konstant sind, ist auch die Krümmung k des Stabes gleichförmig. Die ursprüngliche Gerade \overline{AB} im *Bild 18.6* wird somit zu einem Kreisbogen mit dem Biegezentrum im Punkt P geformt. Ihre Länge wird dabei geringer. Hingegen wird die ihr gegenüberliegende Strecke \overline{CD} vergrößert. Der Krümmungsradius beträgt $R = k^{-1}$.

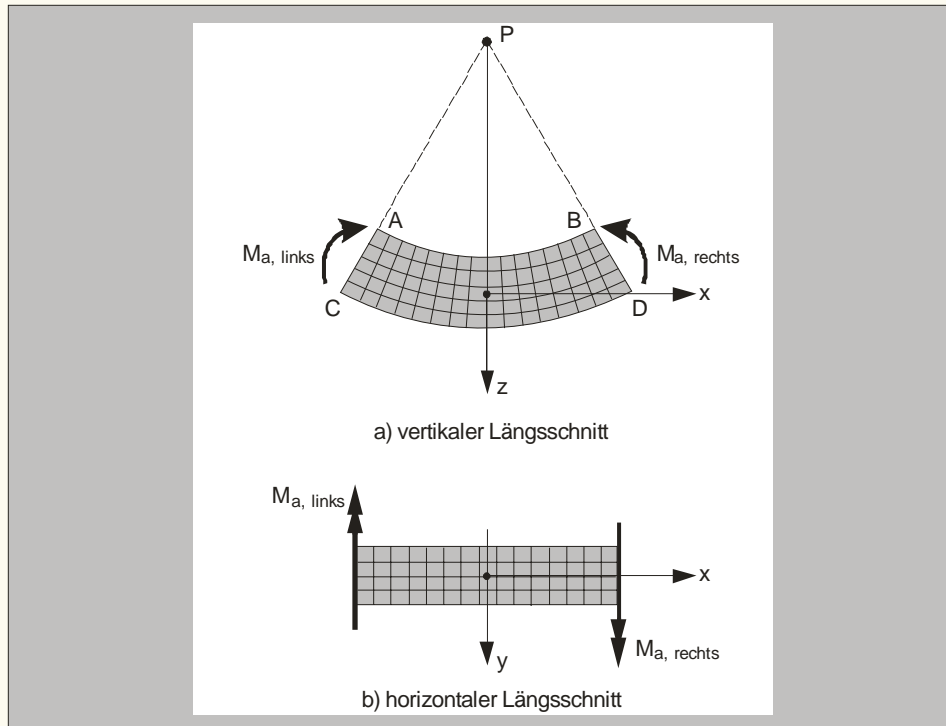


Bild 18.6: Biegung eines geraden Balkens

18.7 Der Biegestab des Bildes 18.6 ist im unverformten Zustand gedanklich in eine große Anzahl kleiner kubischer Elemente zerlegt worden, deren Seitenflächen parallel zu den drei Raumachsen x , y und z angeordnet waren. Der ausgewiesene zugehörige Verformungszustand ist experimentell verifizierbar, womit die im Absatz 18.4 angeführten Hypothesen untermauert werden. Da folglich alle in den beiden Projektionen enthaltenen Seitenflächen zueinander rechte Winkel einschließen, ergibt sich für die Schubverzerrungen $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0$. Somit betragen die Schubspannungen infolge Biegebeanspruchung $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ (vgl. Bild 18.8 a).

18.8 Die Spannungskomponenten σ_y , σ_z und τ_{yz} bzw. τ_{zy} müssen an den Oberflächen eines prismatischen Stabes null sein. Da die oben festgestellten Dehnungen und Verzerrungen keine weiteren Schnittgrößen, außer dem Biegemoment M_y erforderlich machen, nehmen wir an, dass diese Spannungskomponenten im gesamten Prisma null sind. Somit verbleibt als einzige Spannungsgröße, die ungleich null ist, die Biegenormalspannung σ_x (Bild 18.8 b). Folglich haben wir bei der reinen Biegung eines schlanken prismatischen Stabes an jedem Querschnitt denselben axialen Spannungszustand.

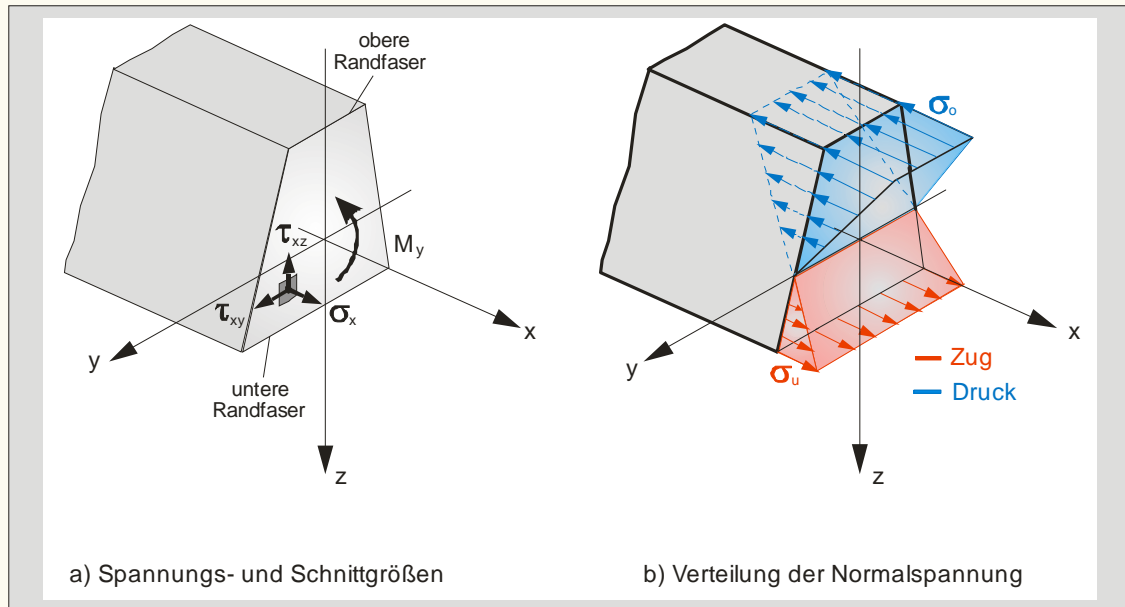


Bild 18.8: Spannungsbeziehungen bei Biegung (unmaßstäbliche Prinzipdarstellung)

Anmerkung: Hinsichtlich der Darstellung der Biegenormalspannungen im Bild 18.8 vergleiche man Absatz 18.28.

18.9 Dass die obigen Annahmen der Technischen Biegelehre nur für sehr kleine Stabverformungen zutreffend sind, kann zum Teil anhand der Biegung eines einfachen Radiergummis anschaulich beobachtet werden. Infolge Querkontraktion kommt es zu nichtlinearen Verwölbungen der Stabquerschnitte, die mittels der Technischen Biegelehre nicht erfassbar sind.

18.10 Zwischen den über den gesamten Querschnitt verteilten, mit unterschiedlichen Vorzeichen behafteten, infinitesimalen Teilkräften $dN_x = \sigma_x dA$ (vgl. Bild 18.8 a) und der Schnittgröße M_y findet man eine weitere Äquivalenzbeziehung der Festigkeitslehre (vgl. Absätze 6.10 bzw. 7.4):

$$\sum_{i=1}^n F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma_x dA \approx 0$$

$$\sum_{i=0}^n M_y = 0 \rightarrow \int_A \sigma_x z dA \approx M_y \approx \text{Äquivalenzbeziehung der Biegung}$$

$$\sum_{i=0}^n M_z = 0 \rightarrow \int_A \sigma_x y dA \approx 0$$

18.11 Wie im ersten Absatz dieses Kapitels bereits hervorgehoben worden ist, sei die z -Achse eine Symmetrieachse des Stabquerschnittes. Da die äußeren Momente innerhalb der Symmetrieebene liegen, bleibt der Stab bei der Biegeverformung bezüglich dieser Ebene symmetrisch. Folglich sind die Biegenormalspannungen bezogen auf die z -Achse ebenfalls symmetrisch verteilt. Mehr kann jedoch über die Querschnittsverteilung der Biegenormalspannungen mittels Gleichgewichtsbedingungen nicht ausgesagt werden. Die Verteilung bleibt unbestimmt. Zu ihrer Bestimmung benötigen wir neben den bereits herausgearbeiteten geometrischen auch physikalische Bedingungen, welche das Materialverhalten eines Stabes charakterisieren.

18.12 Im Kontext mit den angenommen geometrischen Linearitäten soll auch das Materialverhalten linearisiert werden. Dies führt uns wieder zu dem uns bereits aus dem Kapitel 11 bekannten HOOKEschen Gesetz.

18.13 Im Bild 18.13 bedeutet die Verkürzung der oberen Fasern (Strecke \overline{AB}), dass diese unter Druck stehen (negatives Vorzeichen von σ_x). Hingegen liegt bei den gestreckten unteren Fasern eine Zugspan-

nung vor. Folglich muss eine zu der oberen bzw. unteren Außenseite parallele Fläche existieren, bei der sowohl die Dehnungen ε_x , also auch die Spannungen σ_x gleich null sind. Diese Fläche bezeichnet man als die *neutrale Fläche*. Sie erscheint innerhalb der Symmetrieebene als Kreisbogen \overline{EF} (Bild 18.13 a), in der Querschnittsebene jedoch als gerade Linie, die sogenannte *neutrale Achse* (Bild 18.13 b).

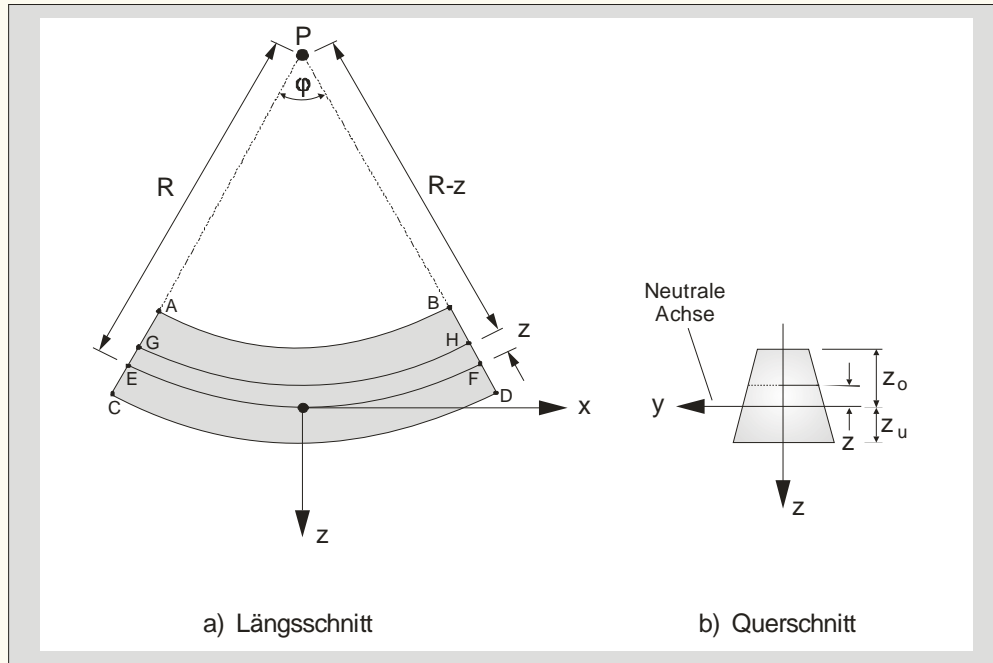


Bild 18.13: Neutrale Fasern bei Biegung

18.14 Es ist nun sinnvoll den Ursprung des Koordinatensystems auf die neutrale Achse zu legen. Dadurch ist der Abstand jedes Querschnittspunktes zur neutralen Fläche mittels der Koordinate z erfasst.

18.15 Die Kreisbogenlänge \overline{EF} entspricht der Länge L des unverformten Elementes. Somit können wir mit dem Krümmungsradius R und dem Zentriwinkel φ des Kreisbogens \overline{EF} folgende Beziehung niederschreiben:

$$L = R \varphi;$$

18.16 Wir betrachten die Bogenlänge \overline{GH} , die sich im Abstand z oberhalb der neutralen Fläche befindet. Ihre Länge L_{gh} beträgt

$$L_{gh} = (R - \text{Abs}[z]) \varphi;$$

18.17 Die Längenänderung ΔL der Strecke \overline{GH} lautet

$$\Delta L = L - L_{gh};$$

18.18 Für das Ingenieurdehnungsmaß ε_x der Längsdehnung der Faser \overline{GH} erhält man

$$\varepsilon_x = \text{Expand}\left[\frac{\Delta L}{L}\right]$$

$$\varepsilon_x = \frac{\text{Abs}[z]}{R}$$

18.19 Entsprechend der Ebenen- und der Normalenhypothese sind die Längsdehnungen ε_x und somit auch die Biegenormalspannungen im gesamten Stabelement an jedem beliebigen Querschnittspunkt proportional zum Abstand z . Über die Querschnittsbreite bleiben die Biegenormalspannungen konstant (*Bild 18.8 b*). Die Vorzeichendefinitionen korrespondieren mit denen der Schnittgrößen nach *Bild 4.11*. Ein negatives Vorzeichen von ε_x bedeutet, dass die betreffende Faser des Stabelementes gedrückt wird.

18.20 Bisher ist noch nichts darüber ausgesagt worden, wo die neutrale Achse im Querschnitt eigentlich lokalisiert ist. Dazu bedienen wir uns des HOOKEschen Gesetzes, der ersten Gleichung der *Beziehungen (18.10)* und der Tatsache $\sigma_x \rightarrow \sigma_x = f(A) = f(y, z)$:

$$\sigma_x = EM \varepsilon_x = EM \frac{z}{R}$$

$$\int_A \sigma_x dA = 0 \implies \int_A EM \frac{z}{R} dA = 0$$

18.21 Da EM und R Konstanten sind, muss der Term $\int_A z dA$ null werden. Dieser Ausdruck entspricht dem Flächenmoment 1. Grades, also dem Statischen Moment der Querschnittsfläche um die y -Achse (siehe *Absätze 17.2 ff.*). Das Statische Flächenmoment ist jedoch nur dann null, wenn die betreffende Achse, also die neutrale Achse, eine Schwerpunktachse der Querschnittsfläche ist.

18.22 Da die Biegenormalspannungen bezogen auf die neutrale Achse y proportional verteilt sind (*Bild 18.8 b*), können wir für σ_x schreiben

$$\sigma_x = \frac{z}{z_o} \sigma_o = \frac{z}{z_u} \sigma_u$$

18.23 Setzen wir die *Beziehungen (18.22)* in die *Äquivalenzbeziehung (18.10)* ein, und berücksichtigt man die bekannte Definition des Flächenmomentes 2. Grades IM_{yy} der Querschnittsfläche um die neutrale y -Achse (siehe *Kapitel 17*), so folgt

$$\left\{ \text{Solve}\left[\int\left(\frac{z}{z_o} \sigma_o z\right) dA = M_y / \int z^2 dA \rightarrow IM_{yy}, \sigma_o\right], \right.$$

$$\left. \text{Solve}\left[\int\left(\frac{z}{z_u} \sigma_u z\right) dA = M_y / \int z^2 dA \rightarrow IM_{yy}, \sigma_u\right] \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \sigma_o \rightarrow \frac{M_y z_o}{IM_{yy}} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \sigma_u \rightarrow \frac{M_y z_u}{IM_{yy}} \right\} \right\} \right\}$$

18.24 Führt man schließlich wieder eine Gleichung der *Beziehungen (18.22)* ein, erhalten wir die Gleichung der Biegenormalspannungen bei einachsiger elastischer Biegung:

$$\sigma_x = \frac{z}{z_o} \sigma_o / . \sigma_o \rightarrow \frac{M_y z_o}{I M_{yy}}$$

$$\sigma_x = \frac{z M_y}{I M_{yy}}$$

18.25 Die einachsige Biegung findet stets um die Schwerpunktsachse statt, die gegenüber allen zu ihr parallelen Achsen das kleinste axiale Flächenmoment 2. Grades besitzt (vgl. Absatz 17.9 f.).

18.26 Da den Techniker in der Regel nur die maximalen Randspannungen interessieren, sind in vielen technischen Nachschlagewerken die sogenannten Widerstandsmomente $W_{\text{Bezugsachse}}$ vertafelt. Sie beziehen sich auf die Querschnittsränder, welche zum Beispiel mit Rand "oben" oder "unten" bzw. Rand "1" und "2" bezeichnet werden. Da sie diskrete Definitionsbeziehungen darstellen, dürfen sie nicht als Funktionen verwendet werden.

$$W_{y,o} = \frac{I M_{yy}}{z_o} \quad \text{bzw.} \quad W_{y,u} = \frac{I M_{yy}}{z_u} \quad \Rightarrow \quad \sigma_o = \frac{M_y}{W_{y,o}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_u = \frac{M_y}{W_{y,u}}$$

Anmerkung: Die deutsche Bezeichnung "Widerstandsmoment" ist leider irreführend. Im Amerikanischen [1] verwendet man hingegen den Begriff "*moment of resistance*" für das Produkt $\sigma \cdot W$, was logisch richtig ist. Das Symbol W trägt hingegen die Bezeichnung "*elastic section modulus*".

18.27 Die Deformation eines Stabes infolge einer reinen, einachsigen Biegung wird durch die konstante Krümmung der neutralen Fläche geprägt. Für den Krümmungsradius erhalten wir einen Ausdruck, auf den wir bei der Ableitung der vereinfachten Differenzialgleichung des geraden Biegebalkens im Kapitel 21 nochmals zurückkommen werden.

$$\text{Solve}\left[\text{Eliminate}\left[\left\{\sigma_x = \frac{M_y z}{I M_{yy}} / . \sigma_x \rightarrow \text{EM } \epsilon_x / . \epsilon_x \rightarrow \frac{z}{R}, k = \frac{1}{R}\right\}, R\right], k\right]$$

$$\left\{\left\{k \rightarrow \frac{M_y}{\text{EM } I M_{yy}}\right\}\right\}$$

18.28 Bei der grafischen Darstellung von Normalspannungen existieren in der Literatur unterschiedliche Formen. Wir favorisieren folgende Vorgehensweise: Die Normalspannungen sowohl infolge zentrischer Belastung (vgl. Bild 6.11) als auch Biegung sollten stets auf der nach außen zeigenden, "freien" Oberfläche abgetragen werden. Vektorpfeile, die auf diese Fläche weisen, stehen für eine Druckspannung. Pfeile, die von ihr weggerichtet sind, repräsentieren den Zustand einer Zugbeanspruchung. Damit die proportionale Abhängigkeit der Biegenormalspannungen jedoch erkennbar bleibt, wird eine Hilfsgerade bzw. -ebene gezeichnet, die ober- oder unterhalb der neutralen Fläche einer Spiegelung der zugehörigen Druckspannungsverteilung entspricht und mit dem zugehörigen Verformungsbild affin ist (vgl. Bild 18.6 bzw. 18.8).

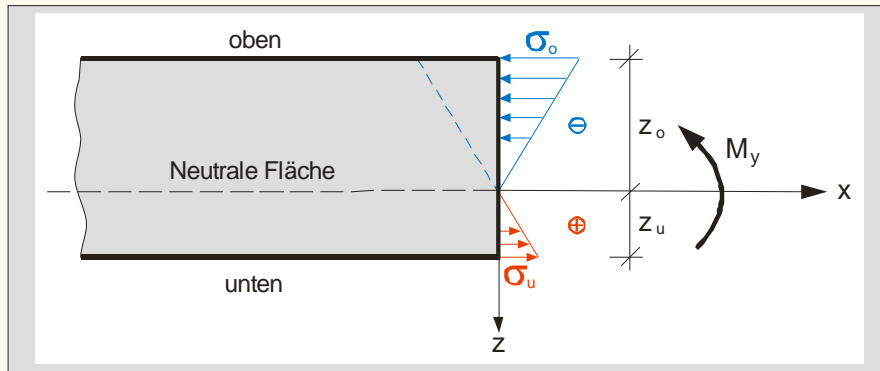


Bild 18.28: Darstellungsform der Biegenormalspannungen

18.29 Auf Basis der fundamentalen Ebenen- und Normalenhypothese bereitet eine Kombination von zentrischer Normalkraft und reiner Biegung keine besonderen Schwierigkeiten (Bild 18.29). Sowohl die Verformungen als auch die Normalspannungsanteile beider Beanspruchungsarten werden schlicht und einfach superponiert (siehe Bild 18.30).

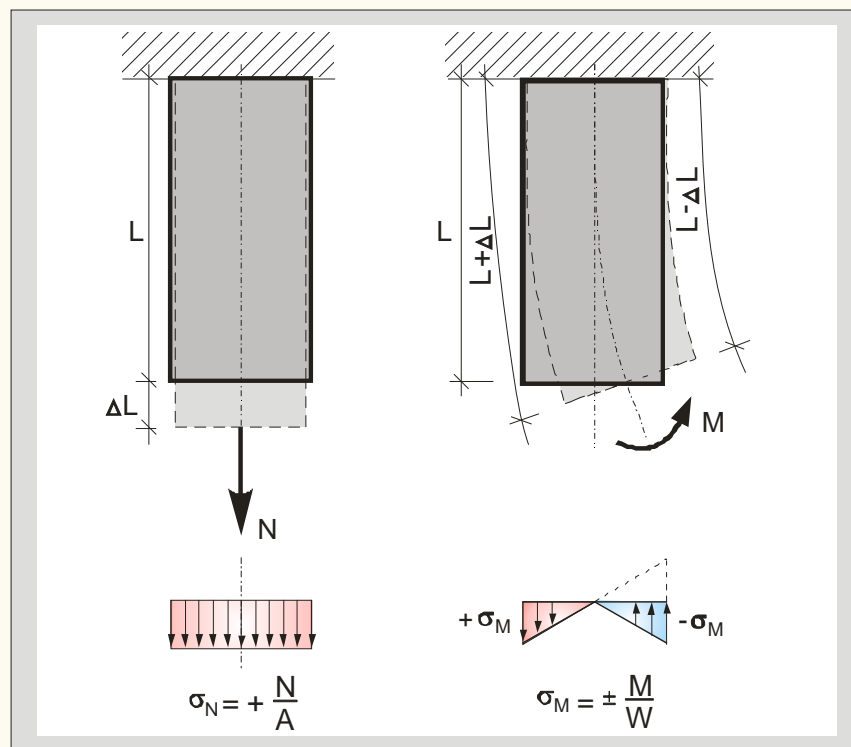


Bild 18.29: Verformungen und Spannungen bei zentrischer Normalkraft und reiner Biegung

18.30 Bei einer Beanspruchung durch Biegung mit Normalkraft beschreibt die zugehörige Verformungsverteilung eine Ebene, die gegenüber der Querschnittsebene verdreht und parallel versetzt ist (Bild 18.30). Der Spannungsanteil in Höhe der neutralen Ebene bzw. -achse repräsentiert allein den Anteil der zentrischen Normalkraft. Die Schnittgerade beider Ebenen wird als Nulllinie bezeichnet, da entlang dieser Geraden die Normalspannungen null sind.

Anmerkung: Im Kapitel 20 werden einige technisch interessante Wechselbeziehungen zwischen der Einwirkung einer außermittigen Normalkraft und der Lage der Nulllinie diskutiert.

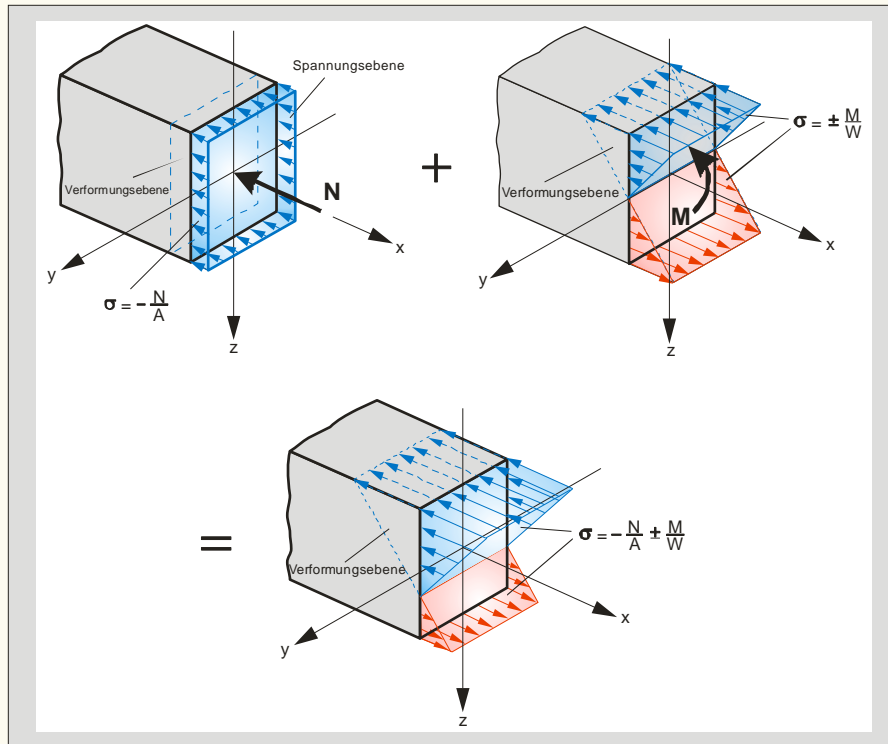


Bild 18.30: Spannungs- und Verformungsebenen bei einer kombinierten Beanspruchung

■ 19 Zweiachsige Biegung mit Normalkraft

19.1 Der im vorherigen *Kapitel 18* beschriebene Beanspruchungszustand der einachsigen Biegung stellt den Sonderfall der zweiachsigen Biegung mit Normalkraft dar. Letztere tritt ein, wenn die Kraftspur- bzw. Lastebene einer äußeren Belastung mit keiner Hauptachse übereinstimmt. Man spricht dann von einer schiefen Biegung. Sollten zwei gleichzeitig wirkende, orthogonal zueinander stehende Belastungsebenen jedoch die Hauptachsen enthalten, dann kann die zweiachsige Biegung als eine triviale Kombination zweier einachsiger Biegungen (Doppelbiegung) interpretiert werden. Diese Überlegung verweist bereits auf das in der Praxis häufig verwendete Lösungsprinzip. Es besteht darin, beliebige äußere Belastungsrichtungen auf die beiden Hauptachsen zu zerlegen.

19.2 Da wir uns über die Annahmen und Bedingungen der technischen Biegelehre bereits ausführlich verständigt haben, ist es an dieser Stelle ausreichend, die allgemeingültige Beziehung zur Bestimmung der Normalspannungen bei beliebig außermittigen Normalkräften in komprimierter mathematisch-physikalischer Form abzuleiten.

19.3 Ausgangspunkt ist der im *Bild 19.1* dargestellte prismatische Stab mit einem unsymmetrischen Vollquerschnitt. Die Schwerachsen y und z sind keine Hauptachsen. Es wird die Funktion der Normalspannungen $\sigma_x = f(y, z)$ gesucht, die sich über den Stabquerschnitt A aufspannt.

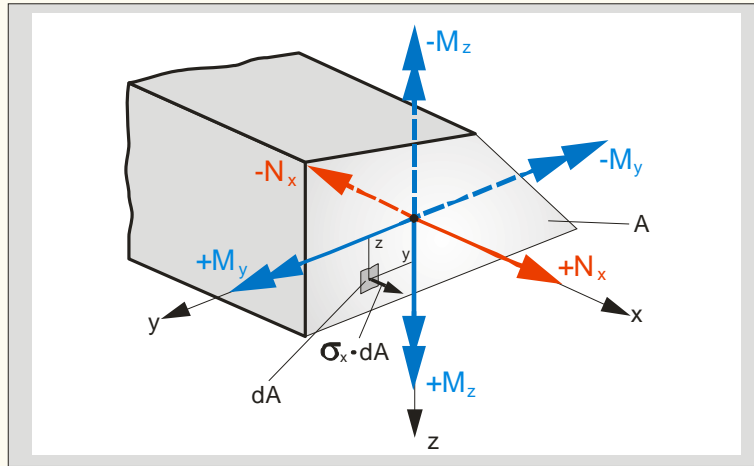


Bild 19.3: Zweiachsige Biegung mit Normalkraft

19.4 Bezogen auf den im *Bild 19.3* im ersten Quadranten eingezeichneten Zugspannungsvektor finden wir drei verallgemeinerte Gleichgewichtsbedingungen (Äquivalenzbeziehungen der Festigkeitslehre):

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F}_x = 0 &\rightarrow \int_A \sigma_x[y, z] \, dA = N_x \\ \sum \mathbf{M}_y = 0 &\rightarrow \int_A \sigma_x[y, z] \, z \, dA = M_y \\ \sum \mathbf{M}_z = 0 &\rightarrow \int_A \sigma_x[y, z] \, y \, dA = -M_z \end{aligned}$$

19.5 Nach dem mechanischen Ansatz folgt die geometrische Bedingung. Sie gehorcht der Ebenenhypothese. Die Ebenengleichung der Querschnittsdehnungen lautet in allgemeiner Form:

$$\epsilon_x[y, z] = \alpha + \beta y + \gamma z$$

19.6 Da drittens von einem linear-elastischen Materialverhalten ausgegangen wird, müssen gemäß dem HOOKEschen Gesetz auch die Normalspannungen einer Ebenengleichung genügen:

$$\sigma_x[y, z] = a + b y + c z$$

19.7 Die *Ansatzfunktion* (19.6) wird in die drei *Äquivalenzbeziehungen* (19.4) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \int_A (a + b y + c z) \, dA &= N_x \\ \int_A (a + b y + c z) \, z \, dA &= M_y \\ \int_A (a + b y + c z) \, y \, dA &= -M_z \end{aligned}$$

19.8 Unter Beachtung der physikalischen Interpretation der Flächenmomente des *Kapitels 17* folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{Da } \int_A a \, dA &= a A \quad \text{und} \quad \int_A b y \, dA = 0 \quad \text{und} \quad \int_A c z \, dA = 0 && \Rightarrow a = \frac{N_x}{A} \\
 \text{Da } \int_A a z \, dA &= 0 \quad \text{und} \quad \int_A b y z \, dA = b I_{Myz} \quad \text{und} \quad \int_A c z z \, dA = c I_{Myy} && \Rightarrow b I_{Myz} + c I_{Myy} = +M_y \\
 \text{Da } \int_A a y \, dA &= 0 \quad \text{und} \quad \int_A b y y \, dA = b I_{Mzz} \quad \text{und} \quad \int_A c z y \, dA = c I_{Myz} && \Rightarrow b I_{Mzz} + c I_{Myz} = -M_z
 \end{aligned}$$

19.9 Wenn die obigen Beziehungen in die Gleichung (19.6) eingefügt werden, erhalten wir für die gesuchte Normalspannungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 &\text{Solve}[\text{Eliminate}[\\
 &\quad \left\{ \sigma_x = a + b y + c z, a = \frac{N_x}{A}, b I_{Myz} + c I_{Myy} = M_y, b I_{Mzz} + c I_{Myz} = -M_z \right\}, \{a, b, c\}], \sigma_x] \\
 &\left\{ \left\{ \sigma_x \rightarrow \frac{A y I_{Myz} M_y - A z I_{Mzz} M_y + A y I_{Myy} M_z - A z I_{Myz} M_z + I_{Myz}^2 N_x - I_{Myy} I_{Mzz} N_x}{A (I_{Myz}^2 - I_{Myy} I_{Mzz})} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

19.10 Das obige Ergebnis kann in eine anschauliche Form umgewandelt werden. Erwartungsgemäß erkennt man, dass die Anteile von Biegung und Normalkraft linear unabhängig sind.

$$\begin{aligned}
 &\text{FullSimplify} \left[\sigma_x = \frac{A y I_{Myz} M_y - A z I_{Mzz} M_y + A y I_{Myy} M_z - A z I_{Myz} M_z + I_{Myz}^2 N_x - I_{Myy} I_{Mzz} N_x}{A (I_{Myz}^2 - I_{Myy} I_{Mzz})} \right] \\
 &\frac{z I_{Mzz} M_y - y I_{Myy} M_z + I_{Myz} (-y M_y + z M_z)}{I_{Myz}^2 - I_{Myy} I_{Mzz}} + \sigma_x = \frac{N_x}{A}
 \end{aligned}$$

19.11 Falls die Schwerachsen Hauptachsen sind, erhalten wir die wesentlich einfachere Gleichung der bereits im Absatz 19.1 erwähnten Doppelbiegung:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N_x}{A} - \text{Expand} \left[\frac{z I_{Mzz} M_y - y I_{Myy} M_z + I_{Myz} (-y M_y + z M_z)}{I_{Myz}^2 - I_{Myy} I_{Mzz}} \right] / . \\
 &\quad \left\{ I_{Myz} \rightarrow 0, M_y \rightarrow M_\eta, M_z \rightarrow M_\xi, I_{Mzz} \rightarrow I_{M\xi}, I_{Myy} \rightarrow I_{M\eta}, y \rightarrow \eta, z \rightarrow \xi \right\} \\
 \sigma_x &= \frac{\xi M_\eta}{I_{M\eta}} - \frac{\eta M_\xi}{I_{M\xi}} + \frac{N_x}{A}
 \end{aligned}$$

19.12 Je nach Ausgangssituation bestehen formal zwei Wege zur Bestimmung der Biegenormalspannungen. Entweder über die auf beliebige Schwerachsen bezogenen Querschnitts- und Momentenwerte gemäß Absatz 19.10 oder über die Hauptachsen nach Gleichung (19.11). Letztere benötigt in der Regel eine Zerlegung der angreifenden Momentenvektoren auf die Hauptachsen und eine Koordinatentransformation bei passiver Drehung gemäß den Beziehungen (17.12), um die Koordinaten η und ξ der ausgewählten Querschnittspunkte zu ermitteln, deren ursprüngliche Vermaßung in der Regel im x - y -System aufbereitet worden ist.

Anmerkung: Besondere Aufmerksamkeit ist den Vorzeichen der Momente zu widmen. Der Lösungsalgorithmus über die Hauptachsen bietet hierbei aufgrund einfacher Analogien zur einachsigen Biegung günstigere Plausibilitätskontrollen.

19.13 Bevor im nächsten Absatz die Analyse eines einfachen Beispiels erfolgt, verweisen wir noch kurz auf die Problematik der Nulllinie, der im Kapitel 20 eine ausführliche Betrachtung gewidmet wird. Die

Nulllinie stellt geometrisch die Schnittgerade zwischen Spannungs- und Querschnittsebene dar. Physikalisch entspricht sie der Verbindungslinie aller Querschnittspunkte, bei denen die resultierende Normalspannung den Wert null hat. Es werden die Nullliniengleichungen für die Fälle mit und ohne Normalkraft ausgewiesen:

$$\left\{ \text{Factor} \left[\text{Solve} \left[\frac{\dot{z} \text{IM}_{zz} M_y - \dot{y} \text{IM}_{yy} M_z + \text{IM}_{yz} (-\dot{y} M_y + \dot{z} M_z)}{\text{IM}_{yz}^2 - \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz}} = \frac{N_x}{A}, \dot{z} \right] \right], \right. \\ \left. \text{Solve} \left[\frac{\dot{z} \text{IM}_{zz} M_y - \dot{y} \text{IM}_{yy} M_z + \text{IM}_{yz} (-\dot{y} M_y + \dot{z} M_z)}{\text{IM}_{yz}^2 - \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz}} = 0, \dot{z} \right] \right\} \\ \left\{ \left\{ \left\{ \dot{z} \rightarrow - \frac{-\dot{y} A \text{IM}_{yz} M_y - \dot{y} A \text{IM}_{yy} M_z - \text{IM}_{yz}^2 N_x + \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz} N_x}{A (\text{IM}_{zz} M_y + \text{IM}_{yz} M_z)} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \dot{z} \rightarrow \frac{\dot{y} \text{IM}_{yz} M_y + \dot{y} \text{IM}_{yy} M_z}{\text{IM}_{zz} M_y + \text{IM}_{yz} M_z} \right\} \right\} \right\}$$

Anmerkung: Da Schwierigkeiten entstanden sind, die Buchstaben zu unterscheiden, die sowohl Index als auch Variable sind, wurden und werden im Weiteren die Variablen y und z als *Formal Characters* geschrieben.

19.14 Als Beispiel dient uns der Rechteckquerschnitt des Bildes 19.14. Die unten angeführten Momente haben die Dimension $[Ncm]$, die Kraft ist in $[N]$ und die geometrischen Größen sind in $[cm]$. Die Breite b des Querschnittes ist parallel zur y -Achse, die Höhe h parallel zur z -Achse ausgerichtet.

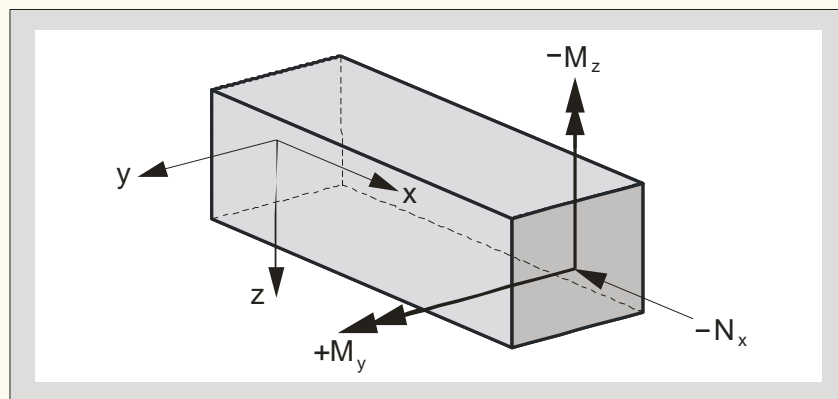


Bild 19.14: Rechteckquerschnitt unter dem Einfluss von M_y , M_z und N_x

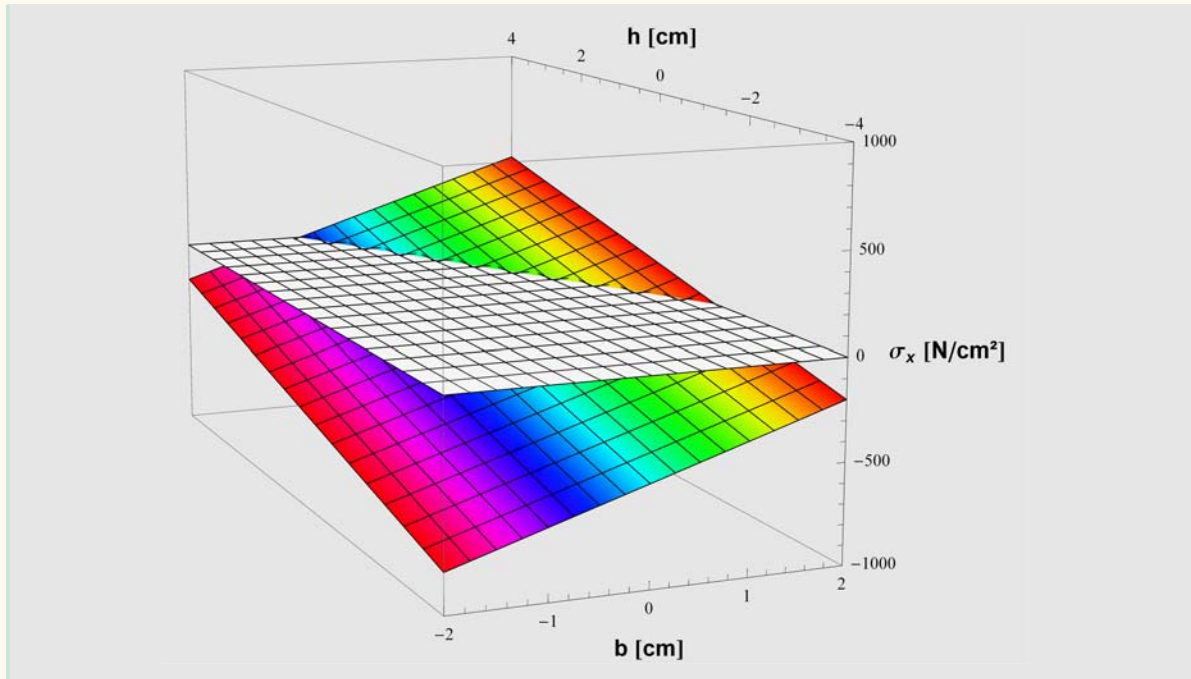
Eingabeparameter:

$$M_y = 12\,800; M_z = -6400; N_x = -6400; b = 4; h = 8;$$

$$\left\{ A = b h, \text{IM}_{yy} = \frac{b h^3}{12}, \text{IM}_{zz} = \frac{h b^3}{12}, \text{IM}_{yz} = 0, W_y = \frac{b h^2}{6}, W_z = \frac{h b^2}{6} \right\}$$

$$\left\{ 32, \frac{512}{3}, \frac{128}{3}, 0, \frac{128}{3}, \frac{64}{3} \right\}$$

Spannungsebene (farbig) vs. Querschnittsebene (weiß):

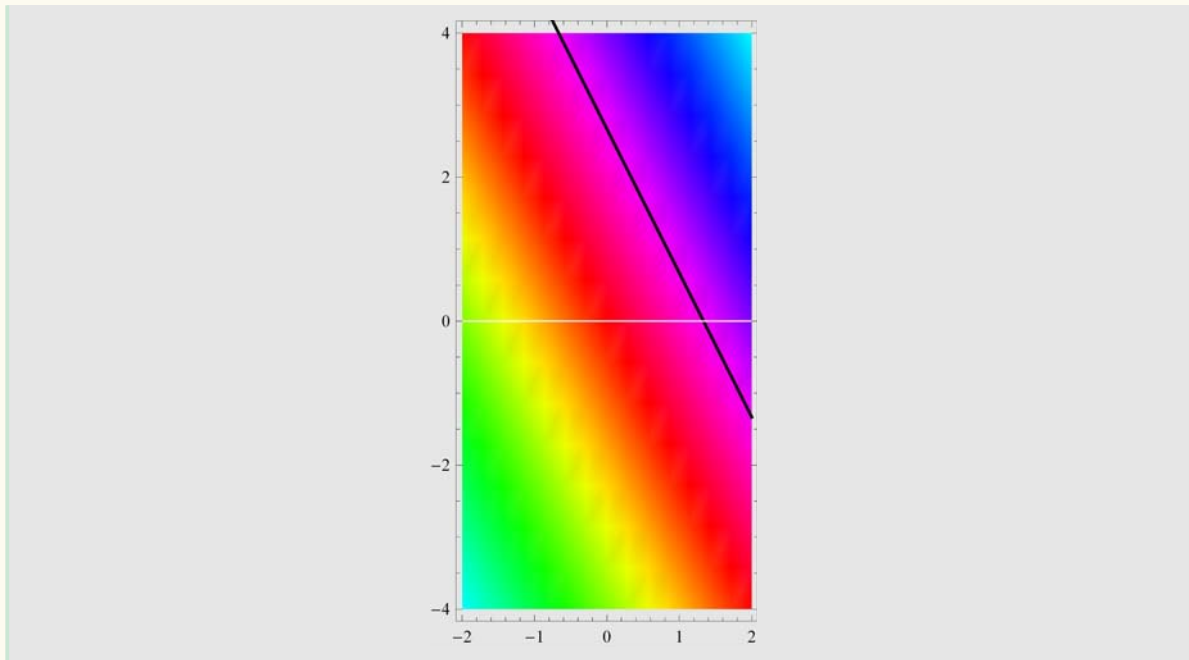


Anhand der obigen Darstellung bereitet es keine Schwierigkeiten, die Koordinaten der maßgebenden Querschnittspunkte, an denen die Extremwerte der Normalspannungen auftreten, zu erkennen. Die beiden ausgewiesenen Spannungswerte für den Druck und den Zug sind in $[N/cm^2]$:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x,\min} &= \frac{A \dot{y} \text{IM}_{yz} M_y - A \dot{z} \text{IM}_{zz} M_y + A \dot{y} \text{IM}_{yy} M_z - A \dot{z} \text{IM}_{yz} M_z + \text{IM}_{yz}^2 N_x - \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz} N_x}{A (\text{IM}_{yz}^2 - \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz})} / . \\ &\{ \dot{y} \rightarrow -2, \dot{z} \rightarrow -4 \}, \\ \sigma_{x,\max} &= \frac{A \dot{y} \text{IM}_{yz} M_y - A \dot{z} \text{IM}_{zz} M_y + A \dot{y} \text{IM}_{yy} M_z - A \dot{z} \text{IM}_{yz} M_z + \text{IM}_{yz}^2 N_x - \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz} N_x}{A (\text{IM}_{yz}^2 - \text{IM}_{yy} \text{IM}_{zz})} / . \\ &\{ \dot{y} \rightarrow 2, \dot{z} \rightarrow 4 \} \end{aligned} \right.$$

$$\{ \sigma_{x,\min} = -800, \sigma_{x,\max} = 400 \}$$

Den Abschluss bildet die Ausweisung der Nulllinie im Querschnitt sowie deren Funktion selbst:



Funktion der Nulllinie: $\dot{z} = 2.66667 - 2 \cdot \dot{y}$

■ 20 Nulllinie, Kernfläche, versagende Zugzone

20.1 Zuerst greifen wir auf das im Absatz 19.14 vorgestellte Beispiel zurück. Sowohl die ein- als auch eine zweiachsige Biegung mit Normalkraft können auch ohne Momentenvektoren allein mit einer einzigen *außermittigen* Normalkraft ausgewiesen werden (Bild 20.1). Die Koordinaten y_N , z_N des fiktiven oder realen Angriffspunktes einer solchen Resultierenden lassen sich wie folgt berechnen:

$$M_y = 12\,800; M_z = -6\,400; N_x = -6\,400; \left\{ y_N = -\frac{M_z}{N_x}, z_N = +\frac{M_y}{N_x} \right\}$$

$$\{-1, -2\}$$

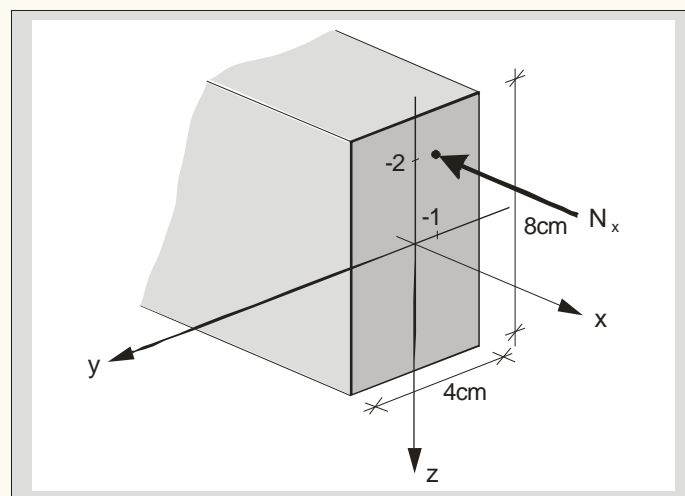


Bild 20.1: Querschnitt mit außermittiger Normalkraft

20.2 Die entsprechenden zugehörigen Dimensionen sind in [N] und in [cm]. Die Zuordnung der Aufpunktko-

ordinaten zum Querschnitt sowie zur Nulllinie zeigt *Bild 20.2*, wobei das y - z -Achssystem des *Bildes 20.1* jetzt in einem klassischen mathematischen x - y -System ausgewiesen wird.

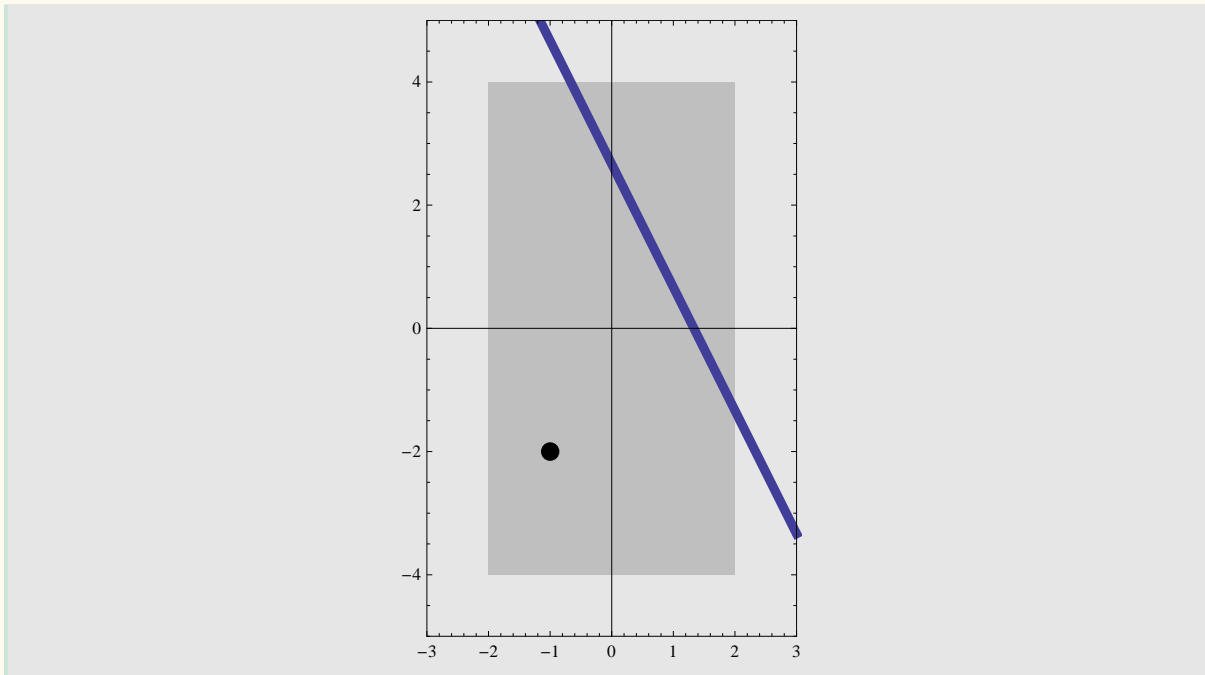


Bild 20.2: Querschnitt mit Aufpunkt und Nulllinie

20.3 Wir kommen nochmals auf die *Nullliniengleichung* (19.13) in Form der *Gleichung* (19.10) für den Fall Biegung mit Normalkraft zurück. Jetzt werden M_y und M_z jedoch mittels der *Aufpunktkoordinaten* (20.1) ausgedrückt. Zusätzlich führen wir die *Trägheitsradien* $i_y = \sqrt{IM_{yy}/A}$ und $i_z = \sqrt{IM_{zz}/A}$ ein. Deren Definition steht im Kontext mit der grafischen Methode zur Analyse der Flächenmomente zweiten Grades, die in der Fachliteratur unter dem Stichwort des *Trägheitskreises* nach Otto MOHR (1835 - 1918) zu finden ist.

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{\dot{z} IM_{zz} M_y - \dot{y} IM_{yy} M_z + IM_{yz} (-\dot{y} M_y + \dot{z} M_z)}{IM_{yz}^2 - IM_{yy} IM_{zz}} - \frac{N_x}{A} == 0 / .\right.$$

$$\left.\{M_z \rightarrow -y_N N_x, M_y \rightarrow z_N N_x, IM_{yy} \rightarrow A i_y^2, IM_{zz} \rightarrow A i_z^2\}\right]$$

$$\frac{N_x (IM_{yz}^2 - A (A i_y^2 (i_z^2 + \dot{y} y_N) + \dot{z} A i_z^2 z_N - IM_{yz} (\dot{z} y_N + \dot{y} z_N)))}{A^3 i_y^2 i_z^2 - A IM_{yz}^2} == 0$$

20.4 Solange $N_x \neq 0$ gilt, ist die Lage der Nulllinie nur von der Querschnittsfläche, dem Flächenmoment zweiten Grades sowie von der Lage des Angriffspunktes der Normalkraft, jedoch nicht von deren Betragsgröße selbst abhängig. Die obige Beziehung vereinfacht sich außerordentlich, wenn die Schwerachsen y und z Hauptachsen des Querschnittes sind.

Anmerkung: Im Fall $N_x \equiv 0$ ist die zweite Lösungsgleichung des *Absatzes* (19.13) relevant.

$$IM_{yz} = 0; \text{Simplify}\left[\frac{N_x (IM_{yz}^2 - A (A i_y^2 (i_z^2 + \dot{y} y_N) + \dot{z} A i_z^2 z_N - IM_{yz} (\dot{z} y_N + \dot{y} z_N)))}{A^3 i_y^2 i_z^2 - A IM_{yz}^2} == 0\right]$$

$$\frac{N_x \left(1 + \frac{y Y_N}{i_z^2} + \frac{z Z_N}{i_y^2} \right)}{A} = 0$$

20.5 Die Lage der Nulllinie stellt ein wichtiges Kriterium für die Beurteilung der Beanspruchungsqualität eines Biegestabes dar. Deshalb seien einige interessante Fälle von Normalspannungsverteilungen angeführt, die anhand selbstgewählter Beispiele relativ einfach nachempfunden werden können:

- Fall A* - Die Nulllinie (NL) befindet sich außerhalb des Querschnittes.
Dann überwiegt der Anteil der zentrischen Normalkraft.
 - Fall AA* - Falls die NL vom Schwerpunkt unendlich weit entfernt ist,
liegt der Sonderfall einer zentrischen Beanspruchung vor.
 - Fall B* - Die NL liegt innerhalb des Querschnittes.
Dann dominiert der Anteil der Biegung.
 - Fall BB* - Falls die NL den Schwerpunkt schneidet,
liegt der Sonderfall einer Biegung ohne Normalkraft vor.
 - Fall C* - Die NL verläuft parallel zu einer Hauptachse.
Es handelt sich um einachsige Biegung mit oder ohne Normalkraft.
- Anmerkung:* Formal gesehen kann der *Fall C* mit den anderen Fällen kombiniert werden.
So wäre z. B. ein *Fall CBB* die einachsige Biegung gemäß *Kapitel 18*.

20.6 Der Grenzübergang zwischen *Fall A* und *Fall B* besitzt für verschiedene baupraktische Problemstellungen eine hervorgehobene Bedeutung. Das betrifft z. B. die Analyse von Bodenpressungen oder die Spannungsermittlung in Mauerwerksfugen. Bei beiden sollten die Querschnitte nach Möglichkeit nur Druckspannungen ausgesetzt sein. Um dies relativ einfach beurteilen zu können, bedient man sich der Kernfläche eines Querschnittes. Sie ist jener Flächenteil in einer Querschnittsebene, wo der Aufpunkt einer resultierenden Normalkraft verbleiben muss, wenn nur Normalspannungen eines Vorzeichens auftreten sollen. Anders ausgedrückt, solange eine Nulllinie die Querschnittsfläche nicht schneidet, ist der Aufpunkt Bestandteil der Kernfläche. Sobald er sich aber außerhalb des Querschnittkernes befindet, dann schneidet die Nulllinie den Querschnitt und es existieren sowohl Zug- als auch Druckspannungen

20.7 Analysiert man die sich aus der obigen Kernflächendefinition ergebenden verschieden Formen an Nulllinienscharen, dann führt uns dies zu allgemeingültigen Aussagen, die mittels einfacher logischer Schlüsse verifiziert werden können. Sie lauten:

- Wenn der Querschnitt symmetrisch ist,
dann ist die Kernfläche um dieselbe Achse symmetrisch.
- Der Kern umschließt immer den Schwerpunkt, muss aber selbst
kein Bestandteil der Querschnittsfläche sein (siehe z. B. Rohrquerschnitt).
- Wenn der Querschnitt eine polygonale Begrenzung hat,
dann ist auch der Kern polygonal begrenzt.
- Wenn der Querschnitt krummlinige Begrenzungen enthält,
dann weist auch die Kernfläche krummlinige Anteile aus.
- Die Kernfläche ist stets konvex.
- Jedem geradlinigen Querschnittsrand ist ein Kernpunkt,
jedem Querschnittseckpunkt eine Kernseite zugeordnet.

20.8 Die letzte Aussage nutzen wir als heuristische Methode zur Bestimmung der Kernfläche. Wir wollen dies für zwei ausgewählte Beispiele aufzeigen. Zunächst wählen wir den bereits bekannten Rechteckquerschnitt und bedienen uns des Ergebnisses des *Absatzes 20.4*. Die Angriffspunkte der resultierenden Normalkraft werden entlang des Außenrandes des Rechteckquerschnittes geführt. Wir erhalten eine Schar von Nulllinien, die sich sehr anschaulich um die Kernfläche des Rechteckquerschnittes drehen ohne sie selbst zu schneiden.

$$IM_{yy} = \frac{b h^3}{12}; IM_{zz} = \frac{h b^3}{12}; A = b h; i_y = \sqrt{\frac{IM_{yy}}{A}}; i_z = \sqrt{\frac{IM_{zz}}{A}};$$

$$\left\{ \text{Solve} \left[1 + \frac{\dot{y} Y_N}{i_z^2} + \frac{\dot{z} Z_N}{i_y^2} = 0, \dot{z} \right], \text{Solve} \left[1 + \frac{\dot{y} Y_N}{i_z^2} + \frac{\dot{z} Z_N}{i_y^2} = 0, \dot{y} \right] \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \dot{z} \rightarrow -\frac{h^2 (b^2 + 12 \dot{y} Y_N)}{12 b^2 Z_N} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \dot{y} \rightarrow -\frac{b^2 (h^2 + 12 \dot{z} Z_N)}{12 h^2 Y_N} \right\} \right\}$$

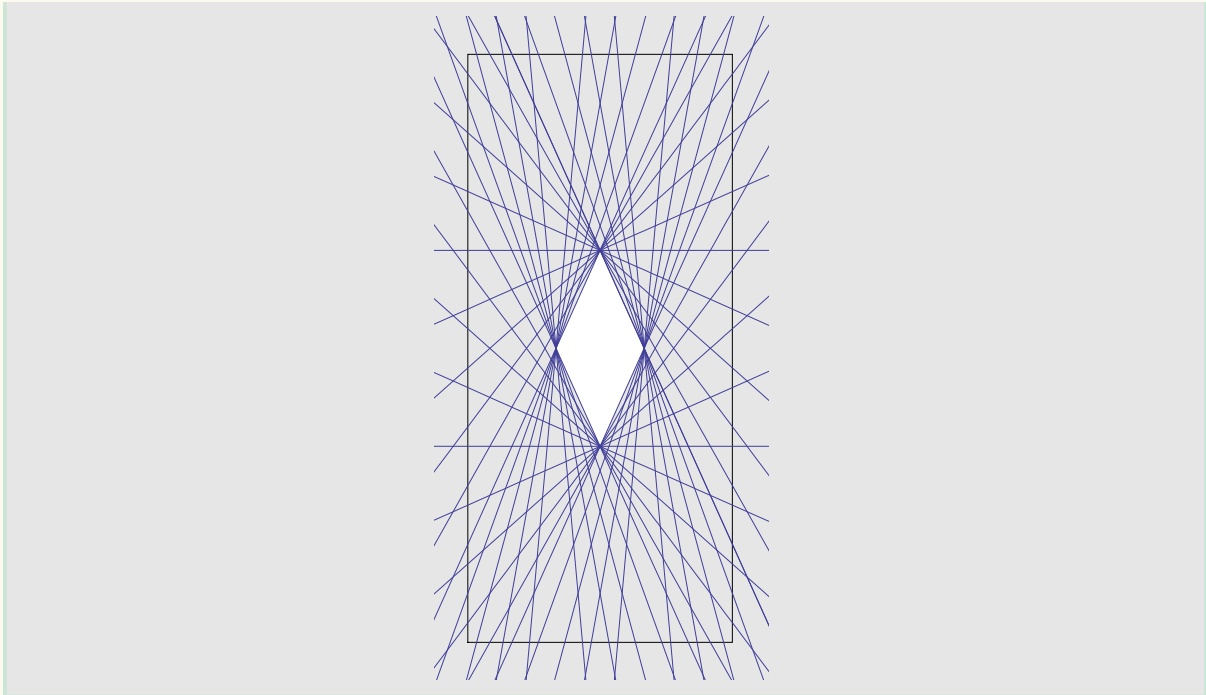


Bild 20.8: Kernfläche (weiß) eines Rechteckes mit umhüllender Nulllinienschar

20.9 Die Kernfläche eines Rechteckes ist ein Rhombus. Wie unten gezeigt, betragen die Abstände ihrer Eckpunkte, der Kernpunkte, von den Schwerpunktsachsen $\pm b/6$ bzw. $\pm h/6$. Diese Kenntnis ist in die Darstellung von Bild 20.8 bei der farblichen Hervorhebung der Kernfläche (weiß) bereits *a priori* eingeflossen.

$$IM_{yy} = \frac{b h^3}{12}; IM_{zz} = \frac{h b^3}{12}; A = b h; i_y = \sqrt{\frac{IM_{yy}}{A}}; i_z = \sqrt{\frac{IM_{zz}}{A}};$$

$$\left\{ \left\{ \text{Solve} \left[\frac{h}{2} = -\frac{i_y^2 (i_z^2 + 12 Y_N)}{i_z^2 Z_N}, \frac{h}{2} = -\frac{i_y^2 (i_z^2 + 2 Y_N)}{i_z^2 Z_N} \right], \{Y_N, Z_N\} \right\} \right\},$$

$$\text{Solve} \left[\left\{ -\frac{h}{2} = -\frac{i_y^2 (i_z^2 + 1 Y_N)}{i_z^2 Z_N}, -\frac{h}{2} = -\frac{i_y^2 (i_z^2 + 6 Y_N)}{i_z^2 Z_N} \right\}, \{Y_N, Z_N\} \right],$$

$$\left\{ \left\{ \text{Solve} \left[\frac{b}{2} = -\frac{b^2 (h^2 + 12 \times 3 Z_N)}{12 h^2 Y_N}, \frac{b}{2} = -\frac{b^2 (h^2 + 12 \times 5 Z_N)}{12 h^2 Y_N} \right], \{Y_N, Z_N\} \right\} \right\},$$

$$\text{Solve} \left[\left\{ -\frac{b}{2} = -\frac{b^2 (h^2 + 12 \times 4 Z_N)}{12 h^2 Y_N}, -\frac{b}{2} = -\frac{b^2 (h^2 + 12 \times 9 Z_N)}{12 h^2 Y_N} \right\}, \{Y_N, Z_N\} \right] \left. \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \left\{ Y_N \rightarrow 0, z_N \rightarrow -\frac{h}{6} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ Y_N \rightarrow 0, z_N \rightarrow \frac{h}{6} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ Y_N \rightarrow -\frac{b}{6}, z_N \rightarrow 0 \right\} \right\}, \left\{ \left\{ Y_N \rightarrow \frac{b}{6}, z_N \rightarrow 0 \right\} \right\} \right\}$$

20.10 Bevor wir die formale Umkehrung der obigen Vorgehensweise vornehmen, bestimmen wir die Geradengleichungen der vier Kernseiten mittels der Zweipunktgleichung. Im Anschluss wird die Nulllinienschar infolge einer Folge von Aufpunkten entlang der Kernseiten des Rechteckquerschnittes gezeichnet.

$$\left\{ b = 4, h = 8, I_{Myy} = \frac{b h^3}{12}, I_{Mzz} = \frac{h b^3}{12}, A = b h, i_y = \sqrt{\frac{I_{Myy}}{A}}, i_z = \sqrt{\frac{I_{Mzz}}{A}} \right\};$$

$$\left\{ \text{Solve} \left[\frac{z1 - \left(-\frac{h}{6}\right)}{y1 - 0} == \frac{0 - \left(-\frac{h}{6}\right)}{\left(-\frac{b}{6}\right) - 0}, z1 \right], \text{Solve} \left[\frac{z2 - 0}{y2 - \left(-\frac{b}{6}\right)} == \frac{\left(\frac{h}{6}\right) - 0}{0 - \left(-\frac{b}{6}\right)}, z2 \right], \right.$$

$$\left. \text{Solve} \left[\frac{z3 - \frac{h}{6}}{y3 - 0} == \frac{0 - \left(\frac{h}{6}\right)}{\left(\frac{b}{6}\right) - 0}, z3 \right], \text{Solve} \left[\frac{z4 - 0}{y4 - \frac{b}{6}} == \frac{-\left(\frac{h}{6}\right) - 0}{0 - \left(\frac{b}{6}\right)}, z4 \right] \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ z1 \rightarrow -\frac{2}{3} (2 + 3 y1) \right\} \right\}, \left\{ \left\{ z2 \rightarrow \frac{2}{3} (2 + 3 y2) \right\} \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \left\{ z3 \rightarrow -\frac{2}{3} (-2 + 3 y3) \right\} \right\}, \left\{ \left\{ z4 \rightarrow \frac{2}{3} (-2 + 3 y4) \right\} \right\} \right\}$$

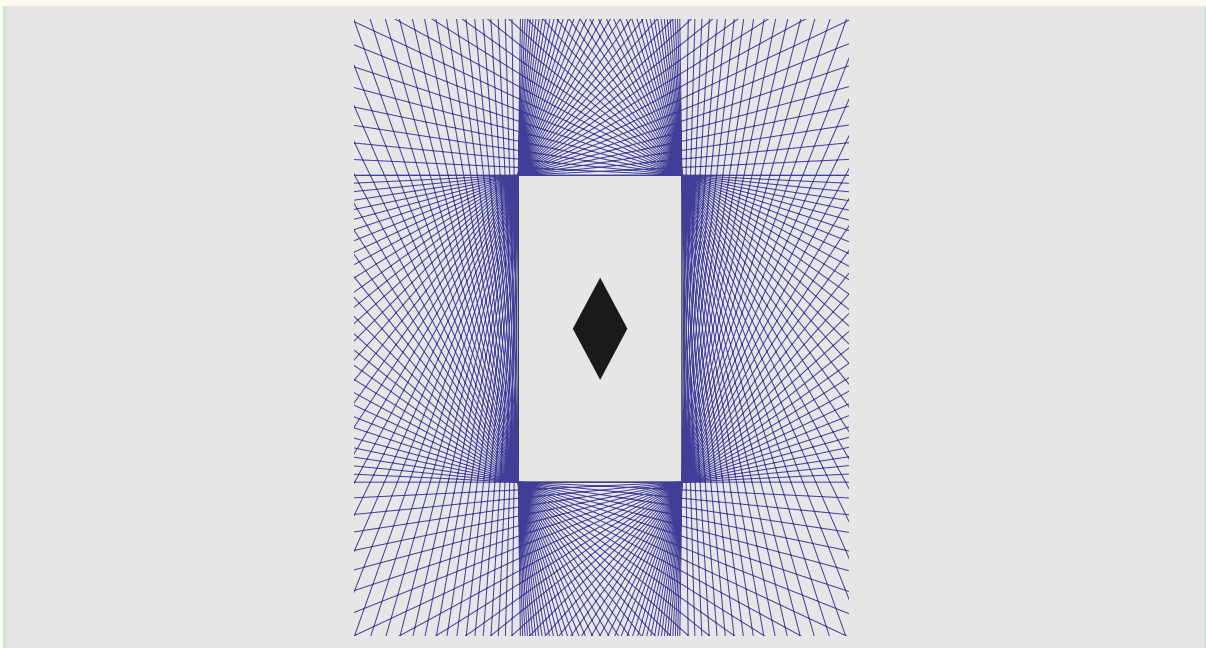
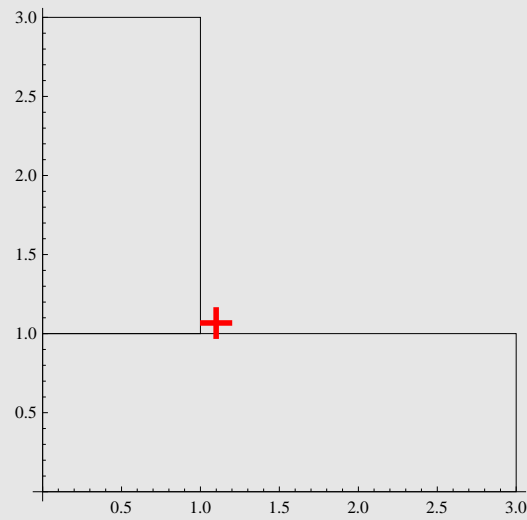


Bild 20.10: Rechteckfläche mit umhüllender Nulllinienschar und Kernfläche (schwarz)

20.11 Als zweites Beispiel wählen wir den Querschnitt eines gleichschenkligen L - Profils unter Ausnutzung des Programmpakets "Structural Mechanics" (siehe Absätze 17.21 ff.). Die entsprechenden zugehörigen Dimensionen sind in [m].

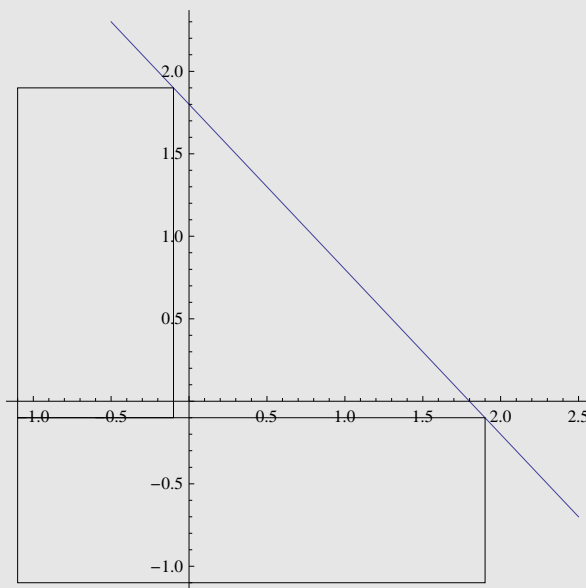
```
Needs["StructuralMechanics`SymCrossSectionProperties`"]
```

{Querschnittsfläche = 5, Schwerpunktkoordinaten = {1.1, 1.1}}



{ IM_{xx} , IM_{yy} , IM_{xy} } -> {9.66667, 9.66667, 4.25}
 { $IM_{\bar{x}_s \bar{x}_s}$, $IM_{\bar{y}_s \bar{y}_s}$, $IM_{\bar{x}_s \bar{y}_s}$ } -> {3.61667, 3.61667, -1.8}

20.12 Da die x - y -Achsen weder Hauptachsen noch Schwerpunktsachsen sind, wird das L-Profil auf die Schwerpunktsachsen y , z transformiert, wobei die z -Achse senkrecht nach oben und die y -Achse horizontal nach rechts weist. Außerdem muss noch die *Beziehung (20.3)* aufbereitet werden.



$$\left\{ \text{Solve} \left[\frac{IM_{yz}^2 - A \left(A i_y^2 \left(i_z^2 + \dot{y} y_N \right) + A \dot{z} i_z^2 z_N - IM_{yz} \left(\dot{z} y_N + \dot{y} z_N \right) \right)}{A^3 i_y^2 i_z^2 - A IM_{yz}^2} = 0, \dot{z} \right], \right. \\ \left. \text{Solve} \left[\frac{IM_{yz}^2 - A \left(A i_y^2 \left(i_z^2 + \dot{y} y_N \right) + A \dot{z} i_z^2 z_N - IM_{yz} \left(\dot{z} y_N + \dot{y} z_N \right) \right)}{A^3 i_y^2 i_z^2 - A IM_{yz}^2} = 0, \dot{y} \right] \right\}$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \dot{z} \rightarrow \frac{-A^2 i_y^2 i_z^2 + IM_{yz}^2 - \dot{y} A^2 i_y^2 y_N + \dot{y} A IM_{yz} z_N}{A (-IM_{yz} y_N + A i_z^2 z_N)} \right\} \right\} \right\},$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ \dot{y} \rightarrow \frac{-A^2 i_y^2 i_z^2 + IM_{yz}^2 + \dot{z} A IM_{yz} y_N - \dot{z} A^2 i_z^2 z_N}{A (A i_y^2 y_N - IM_{yz} z_N)} \right\} \right\} \right\}$$

20.13 Die Herausarbeitung der Kernfläche erfolgt analog zum Absatz 20.8. Da sie, wie im Absatz (20.7) festgestellt worden ist, konvex sein muss, darf beim Umfahren des Querschnittes die einspringende Ecke nur tangiert werden. Die entsprechende unten angeführte Hilfsgerade ist in der obigen Darstellung (20.12) bereits grafisch ausgewiesen worden:

$$\left\{ \left\{ z_3 \rightarrow (0.1 + y_3) \left(-1. + \frac{1.9}{0.1 + y_3} \right) \right\} \right\}$$

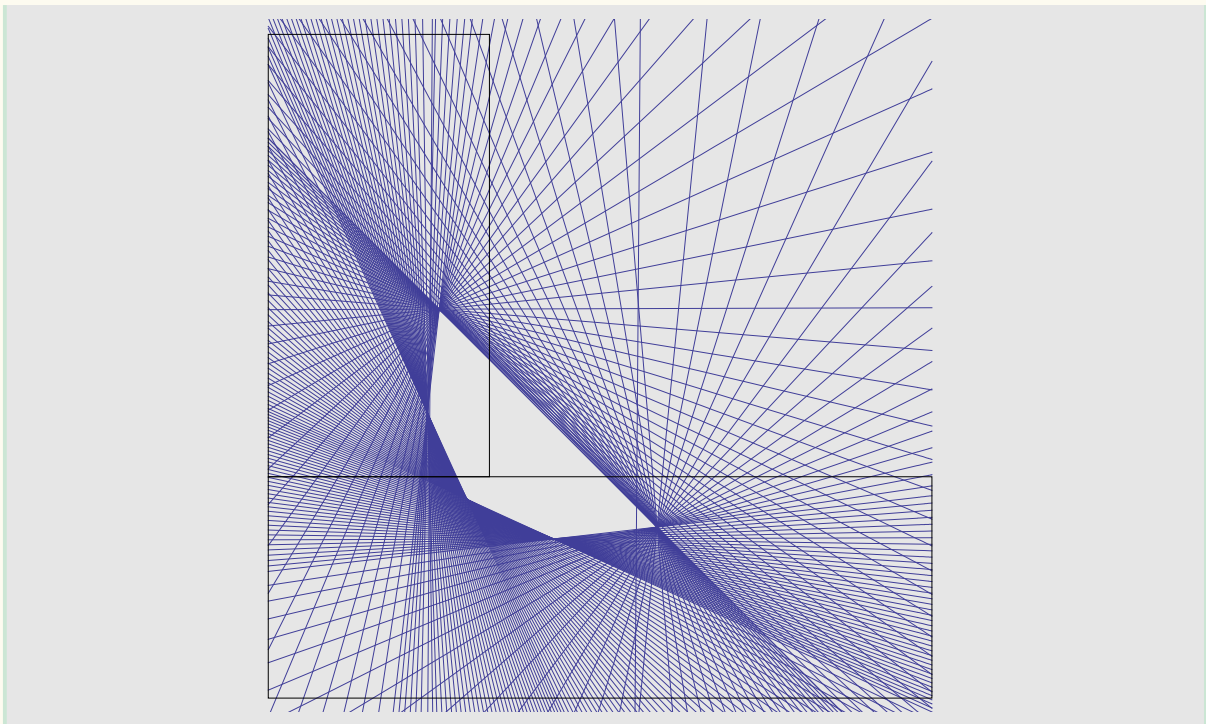


Bild 20.13: Gleichschenklige Winkelfläche mit Kernfläche (weiß) und sie umhüllender Nulllinienschar

20.14 Zum Abschluss ermitteln wir die Koordinaten der fünf Kernpunkte bezogen auf das y - z -System des Absatzes 20.12 und transformieren diese anschließend noch auf die beiden Hauptachsen, welche um 45° gegenüber den Schwerpunktsachsen gedreht sind.

Kernpunktkoordinaten des y - z -Systems:

$$\left\{ \left\{ \left\{ y_N \rightarrow 0.657576, z_N \rightarrow -0.327273 \right\} \right\} \right\},$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ y_N \rightarrow 0.189474, z_N \rightarrow -0.380702 \right\} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \left\{ y_N \rightarrow -0.201852, z_N \rightarrow -0.201852 \right\} \right\} \right\},$$

$$\left\{ \left\{ \left\{ y_N \rightarrow -0.380702, z_N \rightarrow 0.189474 \right\} \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \left\{ y_N \rightarrow -0.327273, z_N \rightarrow 0.657576 \right\} \right\} \right\}$$

Kernpunktkoordinaten auf Hauptachsen $\{\eta, \xi\}$ transformiert:

$$\{ \{0.23356, -0.696393\}, \{-0.135219, -0.403175\}, \\ \{-0.285462, 1.66533 \times 10^{-16}\}, \{-0.135219, 0.403175\}, \{0.23356, 0.696393\} \}$$

Anmerkung: In der Standardliteratur findet der Leser noch etliche Erweiterungen zur Kernflächenproblematik, wie z. B. zur Definition der Kernweite oder der Kernpunktmomente. Da sie uns keine neuen Erkenntnisse liefern, verweisen wir u. a. wieder auf die allgemein bekannten Bautechnischen Berechnungstabellen.

20.15 Bisher sind wir davon ausgegangen, dass wir ein isotropes Materialverhalten vorliegen haben. Bei Werkstoffen, wie Beton oder Mauerwerk, sowie in Bodenfugen ist diese Voraussetzung jedoch nicht erfüllt. Die Übertragung von Zugspannungen ist nur beschränkt bzw. überhaupt nicht möglich. In diesem Fall tritt ein fundamentaler Qualitätswechsel ein. Der Querschnitt kann nur Druckspannungen aufnehmen. Die Anteile der Querschnittsfläche, die einer Zugspannung ausgesetzt wären, leisten keinen Widerstand. Sie werden geöffnet. Man spricht dann von einer klaffenden Fuge oder gerissenen bzw. versagenden Zugzone.

20.16 Beim Auftreten einer versagenden Zugzone können vom Querschnitt keine Momente aufgenommen werden. Es kommt zu einer Umlagerung der inneren Schnittgrößen bzw. der ihnen äquivalenten Spannungen. Eine Lastübertragung ist nur möglich, wenn die Nulllinie im Querschnitt bleibt, wobei je nach Material ein bestimmtes Mindestausmaß der Druckzone erforderlich ist.

20.17 Um das Problem der versagenden Zugzone baupraktisch handhabbar zu lassen, wurden in den verschiedenen Anwendungsgebieten konstruktive Kriterien erarbeitet, die in der Regel die relative Größe der gerissenen Zugzone beschränken. Ziel dieser Festlegungen ist die Beibehaltung der Gültigkeit der Ebenen- und Normalenhypothese sowie des HOOKEschen Gesetzes. Je kleiner eine Druckspannungsfläche im Vergleich zur Gesamtquerschnittsfläche wird, desto mehr weicht die tatsächliche Spannungsverteilung von der einer idealen Spannungsebene ab.

20.18 Unter Annahme einer proportionalen Spannungsverteilung ist deren Bestimmung relativ einfach. Da einzig das Gleichgewicht der Kräfte in einer Richtung erfüllt werden kann, muss die Wirkungslinie der außermittig angreifenden Druckkraft mit der entsprechenden Schwerpunktschwerachse des Spannungskörpers übereinstimmen. Desweiteren ist der Betrag des Normalkraftvektors dem Volumen dieses Spannungskörpers äquivalent.

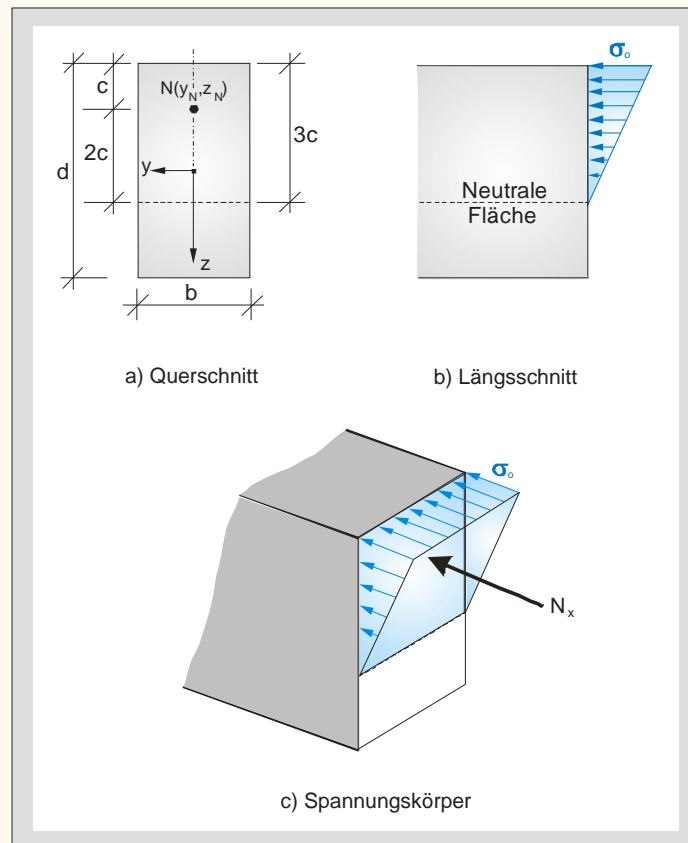


Bild 20.18: Gerissene Zugzone beim Rechteckquerschnitt

20.19 Als Beispiel diene uns der Standardfall des Rechteckquerschnittes des Bild 20.18. Der Aufpunkt der Normalkraft liege auf der z -Achse. Da der Schwerpunkt des Spannungskeiles im Mittelpunkt der Druckfläche liegt, hat die sich einstellende Nulllinie vom oberen Querschnittsrand einen Abstand von $3c$. Die Größe der oberen Randspannung σ_0 beträgt unter Beachtung der Äquivalenzbeziehung (6.10) schließlich:

$$\sum N_x = 0 \rightarrow N - \int_0^A \sigma_x dA = 0$$

$$\text{Solve}\left[N == \frac{1}{2} \sigma_0 3 c b, \sigma_0\right]$$

$$\left\{\left\{\sigma_0 \rightarrow \frac{2 N}{3 b c}\right\}\right\}$$