Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

**Fakultät Geoinformation**

**Lehrmaterial**

# Ausgleichungsrechnung I

Studiengang Vermessungswesen

Lehmann, R.

# Geodätische Messabweichungen

Dresden 2016

FV-06-01.1-3

Herausgeber:
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Friedrich-List-Platz 1
01069 Dresden

Autor:
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Fakultät Geoinformation

März 2016



Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

# INHALT

# 0 EINLEITUNG

Das Ziel von Messungen ist es, Informationen über den Wert geometrischer oder physikalischer Größen zu erlangen. Messungen liefern den wahren Wert dieser Größen aber nicht vollständig exakt. Es verbleiben immer kleine Abweichungen, die sogenannten Messabweichungen, die eine Vielzahl von Ursachen haben.

Aus folgenden Gründen sind Kenntnisse über Messabweichungen in allen messenden Ingenieurdisziplinen wichtig:

1. Als Messende sind wir bestrebt, uns dem wahren Wert der Messgrößen so weit wie es praktisch sinnvoll und gefordert ist, anzunähern. Also müssen wir nach Ursachen von Messabweichungen forschen und Methoden entwickeln, deren Einfluss zu begrenzen.
2. Die Annäherung an den wahren Wert müssen wir auch praktisch nachweisen können. Ergebnis der Messungen müssen also nicht nur die Messwerte sein, sondern auch immer Aussagen, wie weit diese wahrscheinlich vom wahren Wert der Messgrößen entfernt liegen.
3. Schließlich erlauben solche Kenntnisse, die Wirtschaftlichkeit geodätischer Messoperationen zu optimieren, um genaue und zuverlässige Ergebnisse mit weniger Aufwand zu erhalten.

Selbst wenn Aussagen über Messabweichungen nicht explizit getroffen wurden, müssen sie implizit irgendwo verankert sein, sonst sind Messergebnisse nutzlos. Im einfachsten Fall könnte etwa aus der Anzahl der Dezimalziffern, mit denen ein Messergebnis dargestellt wird, eine solche Aussage abzuleiten sein. Leider wird die Anzahl der für Mess- oder Ergebnisgrößen angegebenen Ziffern höchstens grob an deren Genauigkeit orientiert. Praktisch sind es meist viel zu viele Ziffern.

**Beispiel 1**: Der Berg Les Droites im Mont-Blanc-Massiv hat eine gemessene Höhe von 4000 m. Da vier Ziffern angegeben sind, könnte man Metergenauigkeit dieses Wertes vermuten. Man könnte aber auch vermuten, dass es sich um einen grob gerundeten Wert handelt, was in diesem Fall nicht stimmt.

Die Theorie der Messabweichungen geht auf den deutschen Mathematiker, Astronom und Geodäten Carl Friedrich Gauß (1777-1855) zurück. Heute werden die Erkenntnisse dieser Theorie in allen messenden Ingenieurdisziplinen genutzt. Schließlich hat sich eine eigene Wissenschaftsdisziplin entwickelt, die **Metrologie**, die man als „Wissenschaft vom Messen“ bezeichnet.

Praktisch gibt es keine Möglichkeit, die Prozesse, die zu Messabweichungen führen, exakt bis ins kleinste Detail nachzuvollziehen. Deshalb schreibt man Messabweichungen meist der Wirkung des Zufalls zu. Das heißt aber nicht, dass wir den Messabweichungen machtlos gegenüber stehen. Vielmehr können wir auch im Wirken des Zufalls Gesetzmäßigkeiten erkennen und nutzen. Grundlage der Theorie der Messabweichungen ist deshalb die Mathematische Statistik, die solche Gesetzmäßigkeiten erforscht und beschreibt. Für Leser, die noch nicht über vertiefte Kenntnisse der Mathematischen Statistik verfügen, werden die mathematischen Voraussetzungen in diesem Manuskript auf ein Minimum reduziert.

# 1 GRUNDBEGRIFFE

## 1.1 GRUNDBEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN STATISTIK

Wir erläutern die ganz wesentlichen Grundbegriffe möglichst anschaulich, ohne zu viel Wert auf mathematische Exaktheit zu legen. Vertiefen Sie das Studium der Mathematischen Statistik aber unbedingt noch anhand der mathematischen Literatur.

Eine **Zufallsvariable** (früher Zufallsgröße) $X$ kann man sich als eine Größe vorstellen, deren Wert vom Zufall abhängig ist.

Als **Realisierung** einer Zufallsvariable $X$ bezeichnet man den Wert $x$, den die Zufallsvariable $X$ zufällig annimmt.

Den **Erwartungswert** $E\{X\}$ einer Zufallsvariable kann man sich als Mittelwert aus sehr vielen Realisierungen (Grenzwert) vorstellen. (Meist kann ein Mittelwert aus mehr als 100 Realisierungen mit dem Erwartungswert praktisch gleich gesetzt werden.) Der Erwartungswert kennzeichnet das Streuzentrum der Realisierungen von $X$.

Die **Standardabweichung** $\sigma_X$ einer Zufallsvariable $X$ kennzeichnet die Streubreite der Realisierungen von $X$. Sie ist die mittlere quadratische Abweichung von $X$ von seinem Erwartungswert: $\sigma_X = \sqrt{E\{(X - E\{X\})^2\}}$.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariable kann man sich als Häufigkeitsverteilung von sehr vielen Realisierungen (Grenzwert) vorstellen.

Die **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung mathematisch als Grenzwert des Histogramms aus sehr vielen Realisierungen. In Bereichen, wo die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion Null ist, treten keine Realisierungen auf. Dort, wo sie große Werte hat, sind Realisierungen sehr wahrscheinlich.

Unter **Schätzung** versteht man in der Mathematischen Statistik die genäherte Bestimmung von Größen. Die exakte Bestimmung ist theoretisch nicht möglich, weil zufällige Prozesse dies verhindern. Eine Schätzung kann sowohl sehr grob sein, also nur die ungefähre Größenordnung eines Wertes liefern, als auch extrem genau und damit für praktische Zwecke ausreichend sein. Das zahlenmäßige Ergebnis einer Schätzung nennt man **Schätzwert**.

**Beispiel 2**: Die folgenden Daten beziehen sich tw. auf das Jahr 2015: Wenn man einen Einwohner Deutschlands zufällig auswählt, dann ist sein Lebensalter $X$

eine Zufallsvariable. Wird zum Beispiel Bundespräsident Gauck gewählt, ist die Realisierung dieser Zufallsvariable $x$=75. Der Erwartungswert dieser Zufallsvariable beträgt $\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X}\}$=42,1 (Durchschnittsalter aller Deutschen). Die Standardabweichung ist sehr groß, weil die Realisierungen von 0 bis etwa 114 breit streuen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist die um 90° gedrehte Alterspyramide. Der zahlenmäßig stärkste Jahrgang sind die 45-jährigen Menschen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, einen 45-jährigen Menschen zufällig zu wählen, am höchsten. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion hat bei $\boldsymbol{x = 45}$ ihr Maximum.

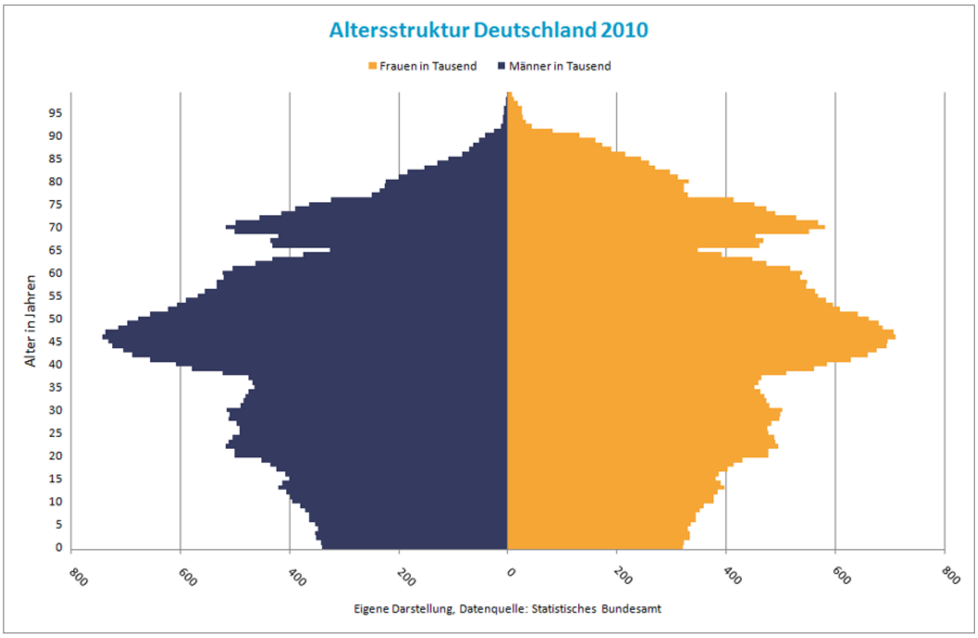


**Abbildung 1:** Alterspyramide Deutschland 2010 (nach sentiso.de)

Einige weitere Begriffe werden im Laufe dieses Lehrmaterial erläutert.

## 1.2 GRÖßEN IM MESSPROZESS

Folgende Begriffe, die meisten sind in der DIN 18709-4 (DIN Deutsches Institut für Normung e.V.) festgelegt, müssen Sie kennen:

Die **Messgröße** ist diejenige physikalische Größe, der die Messung gilt.

Die **Eingangsgröße** ist die Messgröße oder andere Größe, die in die Auswertung der Messung eingeht.

Die **Ergebnisgröße** ist die Zielgröße einer Messung und der anschließenden Auswertung.

Der **wahre Wert** ist der tatsächliche Wert einer Größe, z.B. einer Mess- oder Ergebnisgröße. Praktisch ist der wahre Wert einer Größe eine Fiktion. Deshalb spricht man manchmal vom **richtigen Wert** oder quasi-wahren Wert. Das ist ein

Wert, der dem wahren Wert bis auf vernachlässigbare Abweichungen entspricht. Wahre oder richtige Werte bleiben in der Regel unbekannt.

Der **Messwert** (Beobachtungswert) ist ein einzelner Wert einer Messreihe (Beobachtungsreihe) für eine Messgröße.

Eine **Einflussgröße** ist eine Größe, die den Messwert direkt oder indirekt beeinflusst. Dieser Einfluss muss, wenn er nicht vernachlässigbar klein ist, durch eine rechnerische Korrektur berücksichtigt werden.

Das **Messergebnis** ist der aus Messungen gewonnene Schätzwert für den wahren oder richtigen Wert einer Messgröße.

Die **Messgenauigkeit** ist die qualitative Bezeichnung für das Maß der Annäherung eines Messergebnisses an den wahren oder richtigen Wert der Messgröße.

Die **Messabweichung** ist die quantitative Abweichung eines Messwertes oder Messergebnisses vom wahren oder richtigen Wert der Messgröße.

Wegen des zufälligen Charakters von Messabweichungen sind diese Größen im mathematischen Sinne **Zufallsvariablen**. Auch die Messwerte und alle daraus berechneten Größen wie Messergebnisse sind Zufallsvariablen.

Der **Messfehler** ist der qualitative Zustand der Nichterfüllung einer Forderung an einen Messwert oder ein Messergebnis.

Messabweichungen wurden früher und werden manchmal leider auch heute noch als „Messfehler" bezeichnet. Dies ist nicht zu empfehlen und nach den gültigen Normen auch nicht korrekt, denn die Existenz von Messabweichungen lässt noch nicht darauf schließen, dass beim Messen etwas falsch gemacht wurde. Auch absolut fachmännisch und richtig ausgeführte Messungen haben Messabweichungen, wenn auch nur in der zulässigen Größe.

**Beispiel 3**: Ein Neupunkt soll mit einem Tachymeter als Polarpunkt bestimmt werden. Messgrößen sind Richtung, Zenitwinkel und Distanz vom Standpunkt zum Zielpunkt. Weitere Eingangsgrößen sind die Orientierung des Teilkreises und die Standpunktkoordinaten. Ergebnisgrößen sind die drei Koordinaten des Neupunktes. Messwerte sind die Einzelwerte von Richtung, Zenitwinkel und Distanz, wie diese im Display des Instruments angezeigt bzw. gespeichert werden. Messergebnisse sind ggf. Mittelwerte aus mehreren Anzielungen, z.B. bei satzweisen Messungen. Einflussgrößen sind instrumentelle Konstanten wie Achs- und Nullpunktfehler sowie Luftdruck und Lufttemperatur. Wurde bei der Messung ein falscher Reflektortyp eingestellt, liegt ein Messfehler vor.

**Aufgabe 1**: Analysieren Sie die Bestimmung des Erdumfangs durch Eratothenes (3.Jh v.Chr.) auf dieselbe Weise wie in Beispiel 3.

http://de.wikipedia.org/wiki/Eratosthenes#Bestimmung_des_Erdumfangs

## 1.3 MESSABWEICHUNGEN UND VERBESSERUNGEN

Hin und wieder entstehen Messabweichungen leider auch durch unsachgemäßes oder unsorgfältiges Arbeiten. Diese nennt man **grobe Messabweichungen** oder auch „grobe Fehler", weil hier echte Messfehler im Sinne von Abschnitt 1.1 vorliegen.

**Beispiel 4**: Folgende Messabweichungen sind als grob zu klassifizieren:

- Anzielung des falschen Zielpunktes
- bei elektronischer Distanzmessung: Reflexion von einem Hindernis im Signalweg
- bei GNSS-Messung: falsche Lösung der Mehrdeutigkeiten
- bei manuellem Aufschrieb: Zahlendreher oder falsche Zahl erfasst
- falsche Eingabe, Bedienfehler oder Fehlfunktion des Instrumentes

Eine Messung kann mehrmals

- von demselben Beobachter
- mit demselben Messverfahren und
- mit denselben Instrumenten und Messwerkzeugen

wiederholt werden. Die erhaltenen Messwerte unterscheiden sich aber meist wegen

- zufällig wirkender Messabweichungen und
- sich ändernder, nicht vollständig erfasster und korrigierter Wirkungen von Einflussgrößen.

Sollten Messungen keine groben Fehler enthalten und so wiederholt worden sein, dass sich alle Einflussgrößen nicht geändert haben, dann spricht man von Messungen unter **Wiederholbedingungen**.

Unter diesen Bedingungen ist der **Mittelwert** $\bar{x}$ der Messwerte $x_1, \dots, x_n$ ein sinnvolles Messergebnis:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

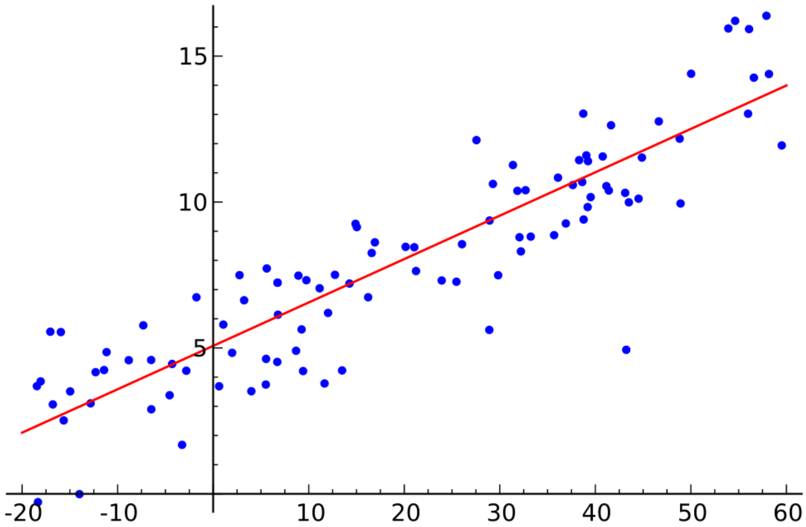


**Abbildung 2**: Messwerte mit zufälligen Messabweichungen und einer (augenscheinlich) groben Messabweichung

Messabweichungen „gleichen sich aus", leider aber nur teilweise. Für wachsenden Umfang $n$ von Messwerten strebt der Mittelwert dem Erwartungswert entgegen: $\overline{x} \rightarrow E\{x\}$.

Der Erwartungswert $E\{x\}$ der Messgröße $x$ stimmt aber nicht mit dem wahren oder richtigen Wert $\tilde{x}$ überein, weil sich durch Mittelbildung selbst über sehr viele Einzelwerte nicht alle Messabweichungen ausgleichen. Es verbleibt eine Differenz, die man als **systematische Messabweichung**

$$\Delta = E\{x\} - \tilde{x}$$

bezeichnet.

**Beispiel 5**: Folgende Messabweichungen sind als systematisch zu klassifizieren:

- bei Distanzmessern oder Nivellierlatten: Nullpunkt- oder Maßstabsabweichungen
- bei GNSS-Antennen: Abweichung des Antennenphasenzentrums vom Antennenreferenzpunkt
- beim Tachymeter: Achsfehler und Höhenindexfehler
- beim Nivellier: Ziellinienfehler
- bei zeitlich nicht weit auseinanderliegenden Messungen: nicht erfasste atmosphärische Einflüsse

Die sich ausgleichenden Messabweichungen nennt man hingegen **zufällige Messabweichung**:

$$\varepsilon_i = x_i - E\{x\}$$

Man beachte, dass $E\{\varepsilon_i\} = E\{x_i - E\{x\}\} = E\{x\} - E\{x\} = 0$ gilt. Das ist kein Naturgesetz, sondern ergibt sich einfach aus der Definition.

**Beispiel 6**: Folgende Messabweichungen sind als zufällig zu klassifizieren:

- Abweichungen beim Anzielen mit dem Fernrohr und
- Abweichungen beim visuellen Ablesen von Skalen
- elektronische Rauschprozesse (engl.: noise)

Nach Zusammenfassen der beiden letzten Gleichungen und Hinzufügen einer möglicherweise groben Messabweichung $g_i$ erhält man

$$x_i = \tilde{x} + \Delta + \varepsilon_i + g_i$$

Die drei Komponenten werden zur **wahren Messabweichung**

$$\eta_i = \Delta + \varepsilon_i + g_i$$

zusammengefasst:

$$x_i = \tilde{x} + \eta_i$$

Das bedeutet: Zum wahren Wert $\tilde{x}$ (Soll) wird die wahre Messabweichung $\eta_i$ addiert und man erhält den Messwert $x_i$ (Ist). Symbolisch:

Messabweichung = Ist - Soll

Praktisch sind die wahre Messabweichung und ihre drei Komponenten in der Regel unbekannt. Aber man kann diesen Größen durch statistische Schätzung nahe kommen. Ein solcher Schätzwert ist die **Verbesserung**:

$$v_i = \bar{x} - x_i$$

Unter der Voraussetzung, dass $n$ sehr groß ist, würde $v_i = -\varepsilon_i$ gelten. Für kleine $n$ gilt das mehr oder weniger näherungsweise. Die Verbesserung $v_i$ ist also ein Schätzwert für die zufällige Messabweichung $\varepsilon_i$, wobei aus historischen Gründen das Vorzeichen umgekehrt ist. Symbolisch:

Verbesserung = Soll - Ist

Wären in der Messreihe $x_1, \dots, x_n$ auch grobe Messabweichungen $g_i$ vorhanden, dann würde die Verbesserung $v_i$ ein Schätzwert für $-(\varepsilon_i + g_i)$ sein. Allerdings wäre es in diesem Fall kein guter Schätzwert. Darauf gehen wir an dieser Stelle nicht näher ein.

Für systematische Messabweichungen ergibt sich keine solche Schätzmöglichkeit, weil die Gesetze des Zufalls nicht ausgenutzt werden können.

Das ist der Grund, warum diese Messabweichungen in der Geodäsie oft weniger Aufmerksamkeit genießen. Das bedeutet nicht, dass diese Messabweichungen unbedenklich wären. Im Gegenteil: Ohne Schätzmöglichkeit sind wir der Wirkung dieser Messabweichungen oft schutzlos ausgeliefert. Es muss alles daran gesetzt werden, solche Messabweichungen schon während der Messung zu vermeiden (↗Abschnitt 2.2).

**Aufgabe 2**: Analysieren Sie das Verfahren der mechanischen Präzisionsdistanzmessung mit Messband und unterscheiden Sie die drei Arten der Messabweichungen.

Neben den drei klassischen Messabweichungen gibt es noch mindestens eine vierte Art, die momentan an Bedeutung gewinnt: Als **Drift** $\Delta_t$ bezeichnet man eine zeitlich veränderliche systematische Messabweichung. Diese tritt nur auf, wenn zeitabhängige Messungen vorliegen. Zeitlich benachbarte Messwerte besitzen etwa gleiche systematische Messabweichungen, aber mit der Zeit können sich diese ändern.

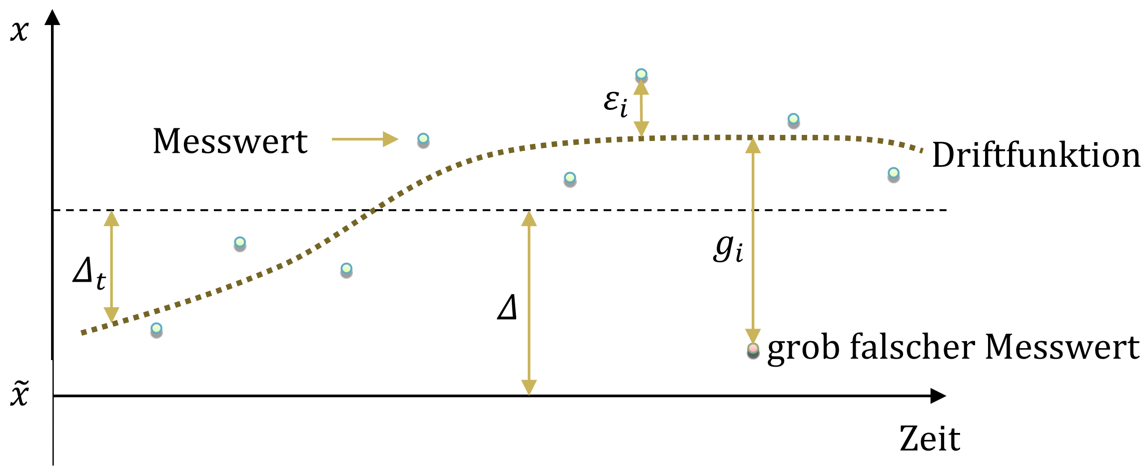


**Abbildung 3**: Zufällige, systematische und grobe Messabweichungen sowie Drift bei einer zeitabhängigen Messung

**Beispiel 7**: Folgende Messabweichungen sind als Drift zu klassifizieren:

- bei Nivellieren, Vermessungskreiseln und Gravimetern, EDM: Geräteinnentemperaturänderungseffekte
- beim Nivellement: Einsinken der Latten und des Stativs
- bei GNSS-Messungen: Mehrwegeffekte

# 2 BEHANDLUNG VON MESSABWEICHUNGEN

## 2.1 ZUFÄLLIGE MESSABWEICHUNGEN

Zufällige Messabweichungen sind prinzipiell unvermeidbar. Allerdings kann man ihre Größe beschränken, z.B. durch Wahl eines genaueren und deshalb aufwändigeren Messverfahrens und/oder eines hochwertigeren Messgerätes. Das wird jedoch wegen der höheren Arbeits- und Ausrüstungskosten nicht generell empfohlen. Wir versuchen statt dessen, die Wirkung zufälliger Messabweichungen rechnerisch zu vermindern. Das ist das Kerngeschäft der geodätischen Ausgleichungsrechnung.

Zufällige Messabweichungen $\varepsilon$ können als Zufallsvariable angesehen werden. Unter Ausnutzung der Gesetze der mathematischen Statistik bereiten diese Messabweichungen praktisch die wenigsten Probleme. Folgende Eigenschaften werden zufälligen Messabweichungen zugeschrieben:

- Der Erwartungswert von $\varepsilon$ ist Null. Das ergab sich aus der Definition in Abschnitt 1.3.
- Negative zufällige Messabweichungen sind etwa genauso häufig wie positive.
- Betragsmäßig große zufällige Messabweichungen sind seltener als kleine.
- Eine betragsmäßig maximale zufällige Messabweichung, die nicht überschritten werden kann, existiert nicht oder kann nicht angegeben werden.

Ausgehend von diesen Eigenschaften wird zufälligen Messabweichungen meist das mathematische Modell der auf C.F. Gauß zurückgehenden **Normalverteilung** zugeordnet. Man kann aber nicht sagen, dass zufällige Messabweichungen immer normalverteilt wären, sondern nur, dass das Modell der Normalverteilung zur Beschreibung solcher Zufallsvariablen praktisch gut geeignet ist.

Die Normalverteilung wird durch zwei Parameter $\mu, \sigma$ vollständig beschrieben:

- durch den Erwartungswert $\mu$, der bei zufälligen Messabweichungen aber gleich Null ist (siehe oben), und
- durch die Standardabweichung $\sigma$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi$ (Abbildung 4) hat im Fall von $\mu = 0$ die Form

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

„exp“ bezeichnet die Exponentialfunktion zur Basis $e$. Die Form der Dichtefunktionskurve ist dem Profil einer Glocke ähnlich, weshalb die Kurve auch als „Glockenkurve“ bezeichnet wird.

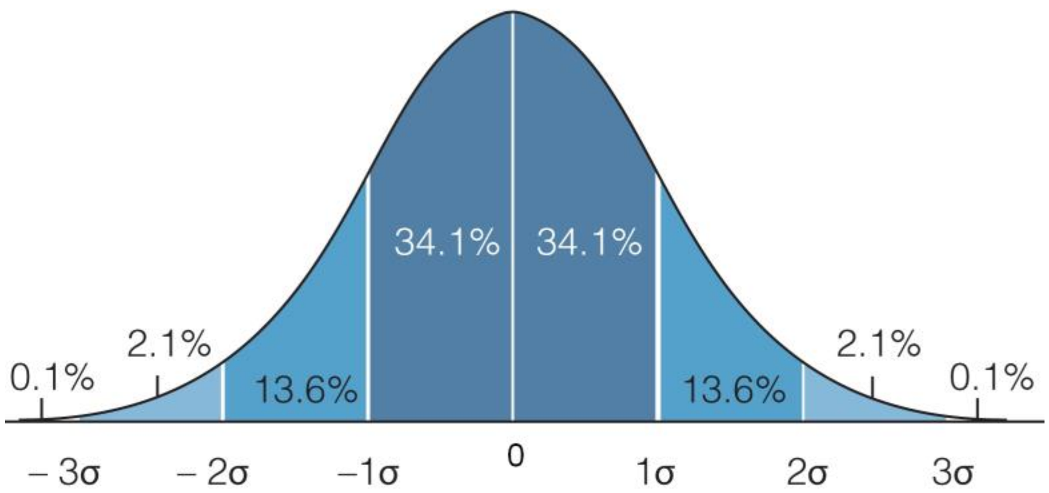


**Abbildung 4**: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung


**Abbildung 5**: links: 10-DMark Banknote mit dem Portrait von C.F. Gauß und der „Glockenkurve“, rechts: vergrößerter Ausschnitt

Die Normalverteilung kommt nicht nur der tatsächlichen Verteilung zufälliger Messabweichungen mehr oder weniger nahe, sondern hat eine Reihe von schönen mathematischen Eigenschaften, die die Arbeit mit dieser Verteilung sehr vereinfachen. Diese lassen sich alle darauf zurückführen, dass lineare Funktionen von normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind. Das ist bei fast keiner anderen Verteilung so.

**Beispiel 8**: Betrachten wir Richtungsmessungen in zwei Fernrohrlagen $r_1, r_2$ und das Mittel aus diesen:

$$r = \frac{r_1 + r_2 \pm 200gon}{2}$$

$\tilde{r}_1, \tilde{r}_2$ bezeichnen die wahren Werte der Richtungen $r_1, r_2$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sind die zugehörigen zufälligen Messabweichungen. Als systematische Messabweichung wirkt der Zielachsfehler $c$. Grobe Messabweichungen sind nicht vorhanden. Dann erhält man

$$r = \frac{\tilde{r}_1 + c + \varepsilon_1 + \tilde{r}_2 - c + \varepsilon_2 \pm 200gon}{2} = \frac{\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 \pm 200gon}{2} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \tilde{r} + \varepsilon$$

(Beachten Sie, dass $c$ in beiden Fernrohrlagen mit unterschiedlichem Vorzeichen wirkt und eliminiert wird.) Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ normalverteilte Zufallsvariablen, dann ist auch $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ als lineare Funktion der Messabweichungen eine normalverteilte Zufallsvariable. Mit $r$ kann demnach so gerechnet werden, als wäre dies selbst ein Messwert und nicht eine Ergebnisgröße.

Die Wahrscheinlichkeit $P$, dass eine Messabweichung $\varepsilon$ in das Intervall $[\varepsilon_u, \varepsilon_o]$ fällt, berechnet man mit der Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Diese Funktion hat leider keine geschlossene Darstellung, ist aber z.B. mit Tabellenkalkulationsprogrammen wie MS EXCEL berechenbar:

P = NORMVERT($\varepsilon_o$;0; $\sigma$;1) – NORMVERT($\varepsilon_u$;0; $\sigma$;1)

Auch auf guten wissenschaftlichen Taschenrechnern findet man diese Funktion, evtl. unter anderem Namen. Für die Intervallgrenzen $-3\sigma, -2\sigma, -1\sigma, 0, 1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ berechnet man so die Wahrscheinlichkeiten in Abbildung 4.

**Aufgabe 3**: Berechnen Sie für eine zufällige Messabweichung mit der Standardabweichung 0,7 mgon die Wahrscheinlichkeit, dass diese zwischen -3mgon und -1,5mgon liegt.

## 2.2 SYSTEMATISCHE MESSABWEICHUNGEN

Systematische Messabweichungen sind keine Zufallsvariable, weil sie nach Definition nicht der Wirkung des Zufalls unterliegen. Leider entziehen sie sich so der Behandlung durch die Methoden der mathematischen Statistik.

① Es gibt jedoch oft die Möglichkeit, Messungen so zu gestalten, dass möglichst wenig Quellen für systematische und stattdessen Quellen für zufällige Messabweichungen auftreten. Man bezeichnet das als **Randomisierung**.

**Beispiel 9**: Messabweichungen durch nicht erfasste atmosphärische Einflüsse auf Messungen wirken systematisch, wenn diese Messungen zeitlich unmittelbar aufeinander folgen. Wird dazwischen ein größerer Zeitraum gelassen, z.B. mehrere Stunden, dann haben sich die atmosphärischen Verhältnisse inzwischen so weit geändert, dass diese Messabweichungen zufällig wirken.

② Eine andere Methode besteht darin, systematische Messabweichungen durch eine spezielle Messungsanordnung auszuschließen. Typisch ist das bei instrumentellen Messabweichungen, also solchen, die durch Unzulänglichkeiten von Messinstrumenten hervorgerufen werden.

**Beispiel 10**: Bei Richtungsmessungen wird in zwei Fernrohrlagen gemessen, um verschiedene Achsfehler auszuschließen. Diese wirken teilweise in beiden Fernrohrlagen mit verschiedenem Vorzeichen und heben sich bei der Mittelbildung auf.

③ Eng verwandt damit ist die Bestimmung instrumenteller Korrektionen durch Kalibrierung oder Eichung, also durch Soll-Ist-Vergleich aus Testmessungen.

**Beispiel 11**: Beim Tachymeter oder Theodolit werden Achsfehler durch Richtungsmessungen zu Testzielen in zwei Fernrohrlagen berechnet. Diese werden im Instrument gespeichert. Bei zukünftigen Richtungsmessungen werden daraus Korrektionen berechnet und bei diesen Messwerten rechnerisch berücksichtigt.

④ Eine letzte Methode besteht darin, systematische Messabweichungen in größeren Ausgleichungsmodellen als unbekannte Parameter einzuführen und in der Ausgleichung zusammen mit den anderen Parametern zu bestimmen. Dieser Methode sind allerdings oft Grenzen dadurch gesetzt, dass diese Bestimmung nur sehr ungenau und/oder unzuverlässig möglich ist. Hier sind eine gründliche Planung der Messungsanordnung und eine gründliche Analyse der Ausgleichungsergebnisse unerlässlich. Die Grundlagen dazu stellt die geodätische Ausgleichungsrechnung bereit.

**Beispiel 12**: Bei freien Stationierungen oder geodätischen Netzen wird oft ein Maßstabsparameter für alle Distanzen berechnet. Dieser Parameter würde z.B. systematische atmosphärische Einflüsse und die Frequenzabweichung des EDM-Oszillators auf die elektronische Distanzmessungen korrigieren. Das gelingt aber nur, wenn der Maßstab des Netzes genau genug aus den Anschlusspunkten des Netzes ableitbar ist. Als Universalmethode ist das nicht zu empfehlen.

**Aufgabe 4**: Sie möchten ein einfaches technisches Liniennivellement zwischen zwei Höhenfestpunkten A und B mit gegebenen Höhen durchführen (Abbildung 6) und befürchten eine systematische Abweichung des Lattenmeters (Maßstabsabweichung des Lattenteilung). Überlegen Sie, welche der vier Methoden dieses Abschnittes infrage kommen, um systematische Abweichungen der Zwischenpunkthöhen infolge eines Lattenmeterfehlers auszuschließen.

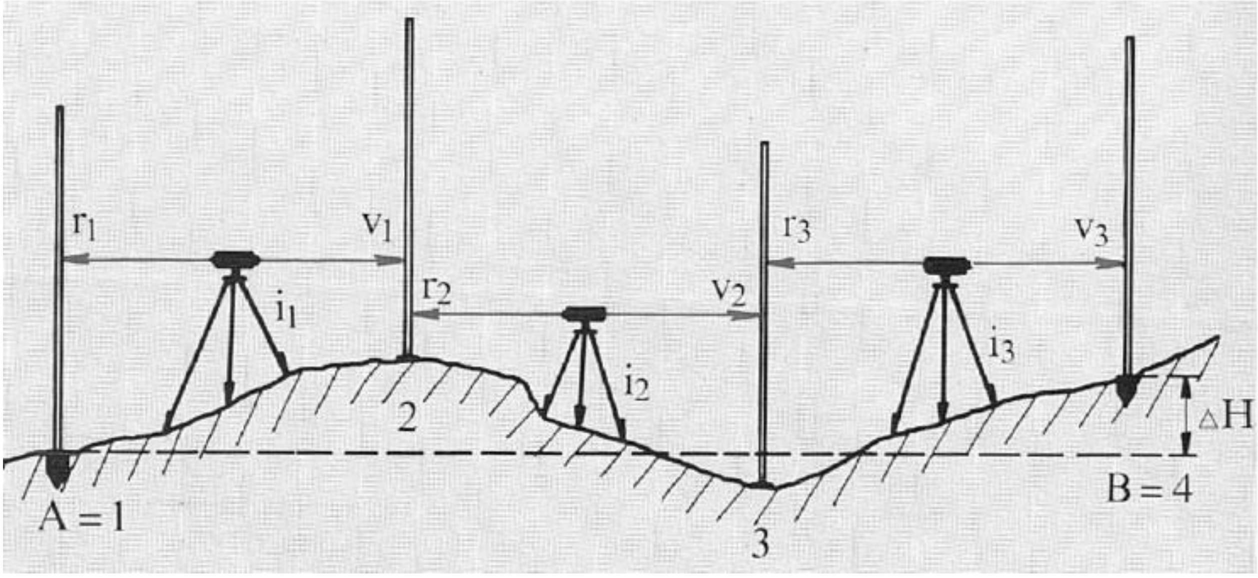


**Abbildung 6**: Liniennivellement (zu Aufgabe **4** und Aufgabe **7**)

## 2.3 GROBE MESSABWEICHUNGEN (FEHLER)

Grobe Messabweichungen können sowohl zufällig, als auch systematisch wirken. Das hängt davon ab, wie man sich die Wiederholung des zufälligen Versuchs „Messung" vorstellt. Trotzdem ist es nach unserer Klassifizierung aus Abschnitt 1.3 keine systematische oder zufällige Messabweichungen!

**Beispiel 13**: Beim Ablesen der Antennenhöhe eines GNSS-Antennenstabs für echtzeitkinematische Messungen könnte ein grob falscher Wert festgehalten worden sein, z.B. durch einen Aufschriebfehler. Ein Neupunkt wird mit diesem Stab mehrmals aufgehalten. (Dabei ist eine Zeitdifferenz von mindestens einer Stunde empfohlen oder sogar vorgeschrieben, damit Mehrwegefehler nicht systematisch wirken, vgl. Beispiel 9.) Wird die Antennenhöhe nur einmal am Anfang bestimmt, wirkt ein möglicher grober Antennenmessfehler systematisch, also auch bei den Wiederholungsmessungen mit gleichem Betrag und Vorzeichen. Wird die Antennenhöhe vor jeder Wiederholungsmessungen neu bestimmt, wirkt ein möglicher grober Antennenmessfehler zufällig, denn wenn ein grober Fehler erneut auftritt, dann selten mit demselben Vorzeichen und Betrag.

Wenige grob falsche Messwerte werden normalerweise aus dem Messdatensatz entfernt. Wenn die Auswertung ohne diese Messwerte möglich und zulässig ist, dann wird sie so durchgeführt. Andernfalls muss die Messung ganz oder teilweise wiederholt werden. Immer muss in der **Dokumentation** der Auswertung klar auf die vorgenommene Eliminierung grob falscher Messwerte hingewiesen werden. Die **Ursachen** der groben Messabweichungen müssen untersucht und möglichst beseitigt werden.

① Das wichtigste Mittel gegen grobe Messabweichungen ist **Sorgfalt und Bedachtsamkeit**. Trotz der immensen Wichtigkeit gehen wir hier nicht weiter auf darauf ein. Es gelten die anerkannten Grundsätze bei der Ausführung geodätischer Messungen.

Darüber hinaus verraten sich grobe Messabweichungen nur, wenn sie große Beträge annehmen. Nicht immer ist das gegeben. So wird im wenig geneigten Gelände die Verwechslung von Horizontalstrecke und Schrägstrecke, obwohl per Definition zweifellos eine grobe Messabweichung, kaum zu großen Abweichungsbeträgen führen (Abbildung 7).

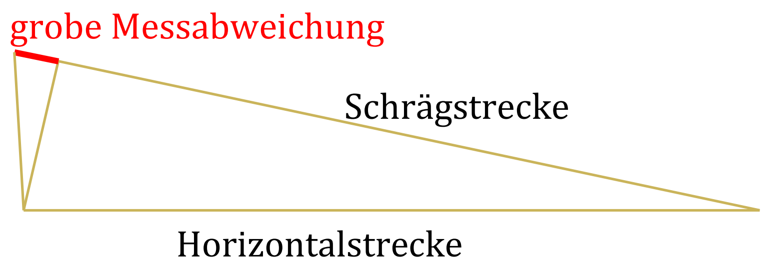


**Abbildung 7**: Verwechslung von Horizontalstrecke und Schrägstrecke

② Sind jedoch die Abweichungsbeträge groß, dann ist die einfachste Methode zur Aufdeckung grober Fehler die **Plausibilitätsprüfung.** Nicht immer ist das selbstverständlich. Das Messverfahren ist so anzulegen, dass eine solche Prüfung stattfinden kann und wirksam ist.

**Beispiel 14**: Wurde die Höhe eines Punktes in zwei zeitlich getrennten Messepochen gemessen, um Bodenbewegungen über einem Altbergbau zu bestimmen, so müsste man überprüfen, ob die erhaltenen Bewegungen nach Betrag und Vorzeichen geologisch überhaupt plausibel sind. Werden z.B. geologische Senkungen erwartet, aber Hebungen gemessen, dann liegt eine grobe Messabweichung nahe.

③ Bei sehr umfangreichen Messungen möchte man die Erkennung grober Messabweichungen gern einem **automatischen Verfahren** überlassen. Dieses arbeitet schneller und möglicherweise zuverlässiger, als der menschliche Bearbeiter. Allerdings setzt es überschüssige (d.h. „redundante") Messungen voraus, also mehr Messwerte, als zur Berechnung der gesuchten Größen unbedingt nötig sind. Je mehr redundante Messungen vorliegen, desto zuverlässiger können grobe Messabweichungen erkannt. werden. Die Grundlagen dazu stellt die geodätische Ausgleichungsrechnung bereit.

Der einfachste Fall tritt auf, wenn mehrere Wiederholungsmessungen einer Größe vorliegen. Die Messwerte unterscheiden sich durch die Wirkung zufälliger Messabweichungen, deren Standardabweichung $\sigma$ am besten bekannt sein sollte. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert um mehr als $3\sigma$ vom wahren Wert abweicht, beträgt nach Abbildung 4 nur 0,2%. Es ist also sehr unwahrscheinlich, dass beim Vorliegen von ausschließlich zufälligen Messabweichungen ein Messwert um mehr als $3\sigma$ vom Mittelwert abweicht. Im Fall, dass das trotzdem passiert, gehen wir eher davon aus, dass doch eine grobe Messabweichung vorliegt. Man bezeichnet diese einfache Erfahrungsregel (Heuristik) als **3σ-Regel**.

**Beispiel 15**: Es wurden Richtungsmessungen in vier Sätzen durchgeführt. Die Standardabweichung der zufälligen Messabweichungen für eine Richtungsmessung beträgt 0,5 mgon. Die vier Messwerte in Gon lauten

16,1063 16,1071 16,1048 16,1065

Der Mittelwert ist 16,1062gon. Die $3\sigma$-Grenzen liegen also bei 16,1047gon und 16,1077gon. Alle Messwerte liegen innerhalb dieser Grenzen. Eine grobe Messabweichung wurde nach der $3\sigma$-Regel nicht erkannt.

Leider hat die $3\sigma$-Regel mehrere **Nachteile**. Vier davon sind:

1. Der wahre Wert der Messgröße ist nicht bekannt. Stattdessen wird wie in Beispiel 15 mit dem Mittelwert gearbeitet, der allerdings davon abweichen kann, insbesondere wenn nur wenige Messwerte vorliegen.
2. Die Standardabweichung $\sigma$ muss bekannt sein. Ist das nicht oder nur unzureichend gegeben, könnte man $\sigma$ durch einen Schätzwert ersetzen (Abschnitt 3.2). Jedoch liefert die $3\sigma$-Regel jetzt nur noch ein genähertes oder sogar falsches Ergebnis, insbesondere wenn nur wenige Messwerte vorliegen.
3. Selten, aber bei einer großen Anzahl $n$ von Messwerten tritt doch zunehmend wahrscheinlich der Fall auf, dass eine zufällige Messabweichung über der $3\sigma$-Grenze liegt. Tendenziell werden hier also grobe Messabweichungen erkannt, die keine sind. Man nennt das in der Mathematischen Statistik einen **Entscheidungsfehler erster Art**. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt etwa $n \cdot 0{,}2\%$, wird also mit $n$ immer größer.
4. Auch kann es passieren, dass grobe Messabweichungen als zufällig klassifiziert werden. Man nennt das in der Mathematischen Statistik einen **Entscheidungsfehler zweiter Art**. Wie wahrscheinlich dieser ist, kann nicht angegeben werden.

**Aufgabe 5**: Mit einem Digitalnivellier werden automatisch nacheinander 10 Lattenablesungen an einer Codelatte vorgenommen. Die aus Erfahrungen bekannte Standardabweichung einer einzelnen Ablesung beträgt $\sigma$=0,1mm. Die 10 Ablesewerte in Meter sind

1,40101; 1,40150; 1,40189; 1,40192; 1,40198

1,40200; 1,40207; 1,40208; 1,40230; 1,40279

Wenden Sie die 3$\sigma$-Regel schrittweise an, um in jedem Schritt den am weitesten vom Mittelwert abweichenden Messwert zu eliminieren, so lange bis keiner mehr die 3$\sigma$-Grenze überschreitet. Beachten Sie, dass man ein anderes Ergebnis erhalten hätte, wenn sofort alle Messwerte eliminiert worden wären, die die 3$\sigma$-Grenze am Anfang überschritten.

# 3 GENAUIGKEITSKENNGRÖßEN

## 3.1 THEORETISCHE UND EMPIRISCHE GRÖßEN

Genauigkeit ist eine qualitative Größe (vgl. Abschnitt 1.1). Aussagen wie „Die Genauigkeit beträgt 0,001 m“ sind deshalb für sich genommen falsch. Allerdings benötigen wir quantitative Angaben für Genauigkeiten, z.B. damit der Auftraggeber eine bestimmte Genauigkeitsforderung aufstellen und der Geodät diese rechnerisch nachweisen kann und muss. Man nennt diese Angaben Genauigkeitskenngrößen oder Genauigkeitsmaße. Man kann sagen: „Die Genauigkeit von *a* und *b* ist gleich“, wenn beiden dieselbe Genauigkeitskenngröße zugeordnet ist.

1. Genauigkeitskenngrößen können schon **vor** der Messung vorliegen, nämlich aus jahrelangen Erfahrungen mit dieser Messtechnologie, wenn bei den aktuellen Messungen durchschnittliche Bedingungen herrschen. Es sind also **theoretische Annahmen**. In der Ausgleichung nennt man diese auch **a priori** Größen.
2. Genauigkeitskenngrößen können zum Nachweis der Genauigkeit auch **nach** der Messung aus aktuellen Messwerten durch Schätzung abgeleitet werden. Dann spricht man von **empirischen Genauigkeitsschätzungen**. In der Ausgleichung nennt man diese auch **a posteriori** Größen.

Früher machte man oft Angaben der Form

Messergebnis ± Genauigkeitskenngröße

also z.B. 17,1165±0,0015. Diese Form ist veraltet. Genauigkeitskenngrößen sind generell positive Zahlen.

## 3.2 STANDARDABWEICHUNG

Traditionell werden zufällige Messabweichungen durch die Standard-abweichung, früher auch „mittlerer Fehler“ genannt, quantifiziert (↗Abschnitt 2.1). Dies ist durch die einfache Berechenbarkeit und die wichtige Stellung der Standardabweichung bei der Beschreibung der Normalverteilung zu erklären.

Heute hat sich für Standardabweichungen international das Symbol $\sigma$ durchgesetzt. Als Symbol für Schätzwerte verwenden wir ein Dach über dem Symbol der zu schätzenden Größe, also hier $\hat{\sigma}$.

Die Schätzung der Standardabweichung ist eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. Für Messwerte $x_1, x_1, \ldots, x_n$ aus einer Reihe von

Wiederholungsmessungen kann eine einfache Formel für die a posteriori Standardabweichung gefunden werden:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$\bar{x}$ ist der Mittelwert der $n$ Messwerte. Bei Microsoft EXCEL lautet die Funktion zur Berechnung dieser Formel

$$\hat{\sigma} = \text{STABW.S(Bereich)}$$

wobei „Bereich" die Messwerte enthält.

**Beispiel 15** (Fortsetzung): Die a posteriori Standardabweichung der vier Messwerte lautet mit $\bar{x}$=16,1062 gon:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(16{,}1063-\bar{x})^2 + (16{,}1071-\bar{x})^2 + (16{,}1048-\bar{x})^2 + (16{,}1065-\bar{x})^2}{4-1}}$$

= 0,98 mgon

Zur richtigen Interpretation von Standardabweichungen muss man bedenken, dass sie **nicht** die Größe systematischer oder grober Messabweichungen charakterisieren. Es ist üblich, Standardabweichungen mit einer oder zwei Ziffern anzugeben (Nullen vorn und hinten nicht mitgerechnet).

**Aufgabe 5** (Fortsetzung): Berechnen Sie die a posteriori Standardabweichung der Messwerte sowohl ohne Eliminierung vermutlich grob falscher Messwerte, als auch nach der Eliminierung.

## 3.3 VARIANZ

Die Varianz $\sigma^2$ ist das Quadrat der Standardabweichung σ. Mathematisch ist die Varianz wichtiger als die Standardabweichung, weil für diese mehr mathematische Gesetze gelten. Vom praktischen Standpunkt aus ist die Varianz als Genauigkeitskenngröße aber ungeeignet, weil der Zusammenhang zur Größe, auf die sich diese bezieht, wenig anschaulich ist. Schon allein die Einheit der Varianz löst Verwirrung aus.

Genauso wie die Standardabweichung kann die Varianz a priori gegeben oder a posteriori berechnet werden. Im zweiten Fall schreibt man das Symbol $\hat{\sigma}^2$.

Genauso wie die Standardabweichung kennzeichnet auch die Varianz nur die Größe **zufälliger** Messabweichungen.

**Beispiel 15** (Fortsetzung): Die a posteriori Varianz der vier Messwerte beträgt $\hat{\sigma}^2 = 0{,}96 \text{ mgon}^2$! Dieser Wert ist nicht anschaulich.

## 3.4 GEWICHTE

Häufig ist es nicht möglich, die absoluten Genauigkeiten der Messwerte anzugeben, aber immerhin ist es möglich, diese Genauigkeiten der Messwerte untereinander **relativ** anzugeben. Dann wird die Genauigkeit durch Gewichte ausgedrückt. Je höher die Genauigkeit eines Messwertes, desto höher das Gewicht. Der Zusammenhang zwischen Standardabweichungen $\sigma$ und Gewichten $p$ ist festgelegt als

$$\frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2} = \frac{p_j}{p_i}$$

Die Gewichte verhalten sich also umgekehrt proportional wie die entsprechenden Varianzen.

Allerdings sind Gewichte nur bis auf einen konstanten positiven Faktor bestimmt, der frei wählbar ist. $p_1, p_2, p_3$ drücken z.B. dieselben relativen Genauigkeiten wie $10p_1, 10p_2, 10p_3$ aus, weil sich die Faktoren 10 im Quotienten der letzten Formel aufheben.

① Eine Möglichkeit, diese Unbestimmtheit zu beseitigen, besteht darin, dass man einem einzelnen Messwert willkürlich ein Gewicht zuweist.

**Beispiel 16**: In einem Höhennetz sind alle Höhendifferenzen mit demselben Verfahren bestimmt worden. Natürlich sind diese Höhendifferenzen nicht gleich genau, sondern die Genauigkeiten sind immer abhängig vom Abstand der Punkte: Je weiter die Punkte räumlich auseinander liegen, desto ungenauer wird die Höhendifferenz gemessen. Für dieses Messverfahren ist bekannt, dass die Standardabweichungen $\sigma$ sich verhalten, wie die Wurzeln aus den Punktabständen $R$:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_j} = \sqrt{\frac{R_i}{R_j}} = \sqrt{\frac{p_j}{p_i}}$$

a) Eine Möglichkeit, Gewichte festzulegen, besteht darin, dass man z.B. dem Messwert 1 das Gewicht $p_1 = 1$ zuordnet:

$$\frac{R_1}{R_j} = \frac{p_j}{p_1} = \frac{p_j}{1}, \quad \text{also} \quad p_j = \frac{R_1}{R_j}$$

b) Eine weitere Möglichkeit besteht darin, einen Bezugsabstand für das Gewicht 1 festzulegen, z.B. $R$ = 1km, so dass man für alle Gewichte erhält:

$$p_j = \frac{1\ \text{km}}{R_j}$$

Die Möglichkeit b) mit $R$=1km ist bei Höhennetzen die Standardvariante.

**Beispiel 17**: In einem Richtungs-Strecken-Netz sind alle Richtungen in zwei Vollsätzen gemessen worden, so dass diese dieselbe Genauigkeit und also gleiche Gewichte haben. Alle Strecken $e$ haben laut Hersteller des EDM Standardabweichungen von „2mm+5ppm", das bedeutet $\sigma = 2\text{mm}+5\cdot 10^{-6}\cdot e$.

Legt man für die erste Distanz das Gewicht 1 fest, ergeben sich folgende Gewichte:

| Gemessene Distanz $e$ | Standardabweichung $\sigma$ | Gewicht $p$ |
|---|---|---|
| 161,063 m | 2,8 mm | 1,00 (Festlegung) |
| 140,291 m | 2,7 mm | $2{,}8^2/2{,}7^2$=1,08 |
| 171,165 m | 2,9 mm | $2{,}8^2/2{,}9^2$=0,93 |
| 230,697 m | 3,2 mm | $2{,}8^2/3{,}2^2$=0,77 |

Die Frage, welche Gewichte den Richtungen zuzuordnen sind, kann nicht ohne weiteres beantwortet werden. Gewicht 1 kann es jedenfalls nicht sein, denn das würde bedeuten, dass die Richtungen dieselbe Genauigkeit haben, wie die erste Distanz. Das ist offenbar sinnlos. Die Gewichtsfestlegung ist erst möglich, wenn auch absolute Genauigkeiten der Richtungen bekannt sind. Nehmen wir für alle Satzmittel $\sigma$ = 0,5 mgon an, so erhalten wir

$$\frac{p_{\text{Strecke1}}}{p_{\text{Richtung}}} = \frac{1{,}00}{p_{\text{Richtung}}} = \frac{\sigma^2_{\text{Richtung}}}{\sigma^2_{\text{Strecke1}}} = \frac{(0{,}5\ \text{mgon})^2}{(2{,}8\ \text{mm})^2}$$

Und schließlich

$$p_{\text{Richtung}} = \frac{(2{,}8\ \text{mm})^2}{(0{,}5\ \text{mgon})^2} = 31\,\frac{\text{mm}^2}{\text{mgon}^2}$$

Es mag unerwartet sein, dass ein Gewicht eine Einheit erhält. Wenn die Messwerte unterschiedliche Einheiten haben, ist das unvermeidbar.

② Eine weitere Möglichkeit, Gewichte festzulegen, wenn allen Messwerten a priori eine Standardabweichung zugeordnet werden kann, besteht darin, eine **Standardabweichung der Gewichtseinheit** $\sigma_0$ willkürlich festzulegen. Das bedeutet: In dem Fall, dass einem Messwert die Standardabweichung $\sigma_0$ zugeordnet ist, bekommt dieser Messwert das Gewicht $p_0 = 1$. Allerdings muss nicht unbedingt ein solcher Messwert vorhanden sein. Aus der Definitionsformel der Gewichte erhält man

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma_j^2} = \frac{p_j}{p_0} = \frac{p_j}{1} = p_j$$

$\sigma_0$ kann in jeder Auswertung zusammengehöriger Messwerte nur einmal gewählt werden.

**Beispiel 17** (Fortsetzung): Eine weitere Möglichkeit, beim Richtungs-Strecken-Netz Gewichte festzulegen, besteht darin, eine Standardabweichung der Gewichtseinheit $\sigma_0$ willkürlich festzulegen. Wählen wir $\sigma_0 = 1$, so erhalten wir für alle Richtungen (Satzmittel) das Gewicht

$$p_j = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{Richtung}}^2} = \frac{1^2}{(0{,}5\ \text{mgon})^2} = 4\ \text{mgon}^{-2}$$

und für die Distanzen $1/(2{,}8\ \text{mm})^2 = 0{,}128\ \text{mm}^{-2}$, $1/(2{,}7\ \text{mm})^2 = 0{,}137\ \text{mm}^{-2}$, $1/(2{,}9\ \text{mm})^2 = 0{,}119\ \text{mm}^{-2}$ und $1/(3{,}2\ \text{mm})^2 = 0{,}098\ \text{mm}^{-2}$. Diese Wahl der Gewichte ist völlig gleichwertig zu der vorangegangenen.

**Aufgabe 6**: Drei Punkte A,B,C wurden mit dem GPS-Verfahren gemessen. Dabei wurden jeweils drei Koordinaten Nord, Ost und Höhe bestimmt. Es ist bekannt, dass wegen der unterschiedlichen Verteilung der Satelliten (am Nordhimmel befinden sich weniger Satelliten und von unten werden gar keine Signale empfangen) sich die Standardabweichungen der Koordinaten $\sigma_{\text{Nord}}$: $\sigma_{\text{Ost}}$: $\sigma_{\text{Höhe}}$ wie 3:2:5 verhalten. Weil Punkt B unter einem belaubten Baum liegt, wo die Stärke der Satellitensignale geringer ist, sind dort die Standardabweichungen aller Koordinaten doppelt so groß wie auf den anderen beiden Punkten. Bestimmen Sie Gewichte für alle neun Koordinaten.

## 3.5 KONFIDENZINTERVALL (VERTRAUENSINTERVALL)

Der Nachteil der a posteriori Standardabweichung $\hat{\sigma}$ ist, dass damit keine Wahrscheinlichkeitsaussage verbunden ist. Für die a priori Standardabweichung $\sigma$ eines Messwertes oder eines Ergebniswertes $x$ gilt zwar unter der Annahme der Normalverteilung von $x$, dass das Intervall $[x - \sigma, x + \sigma]$ den

Erwartungswert der Messgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% überdeckt (vgl. Abbildung 4). Für die a posteriori Standardabweichung $\hat{\sigma}$ ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit aber geringer, weil noch Abweichungen aus deren Bestimmung a posteriori hinzukommen.

Man möchte ein möglichst kleines Intervall $[x - c, x + c]$ angeben, welches den Erwartungswert der Messgröße oder Ergebnisgröße aber dennoch mit hoher Wahrscheinlichkeit überdeckt. Dieses nennt man Konfidenz- oder Vertrauensintervall. Die Wahrscheinlichkeit, dass es den Erwartungswert nicht überdeckt, nennt man die **Irrtumswahrscheinlichkeit** α. Sie soll fest vorgegeben werden können, um Konfidenzintervalle vergleichbar zu machen. Üblich sind α=0,01=1% oder α=0,05=5% oder α=0,10=10%. Je kleiner α gewählt wird, desto größer wird das Konfidenzintervall. Die Wahrscheinlichkeit 1-α nennt man das **Konfidenzniveau**. Zu einem Konfidenzintervall muss immer das zugehörige Konfidenzniveau mit angegeben werden, sonst hat es keine Aussagekraft. Die Grenzen des Konfidenzintervalls nennt man auch die untere und obere **Vertrauensgrenze**.

Aus $n$ Messwerten einer Reihe von Wiederholungsmessungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kann man Folgendes berechnen:

$$c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{oder} \quad c = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$$

Die zweite Formel wird verwendet, wenn die a priori Standardabweichung $\sigma$ eines Messwertes nicht oder nur unsicher bekannt ist, so dass die erste Formel nicht verwendet werden kann. Hieraus ergibt sich das Konfidenzintervall für $E\{x\}$:

$$[\overline{x} - c, \overline{x} + c]$$

Die Werte für die statistischen Größen $z$ und $t$ (Quantile der Testverteilungen) kann man folgender Tabelle entnehmen:

| | $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | $t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | | $n$ = 2 | $n$ = 3 | $n$ = 4 | $n$ = 5 | $n$ = 7 | $n$ = 10 | $n$ = 15 | $n$ = 20 |
| α=0,10 | 1,64 | 6,31 | 2,92 | 2,35 | 2,13 | 1,94 | 1,83 | 1,76 | 1,73 |
| α=0,05 | 1,96 | 12,71 | 4,30 | 3,18 | 2,78 | 2,45 | 2,26 | 2,14 | 2,09 |
| α=0,01 | 2,58 | 63,66 | 9,92 | 5,84 | 4,60 | 3,71 | 3,25 | 2,98 | 2,86 |

Mit Microsoft EXCEL ist z.B. folgende Berechnung dieser Größen möglich:

z = NORM.S.INV(1-α/2)   oder   t = T.INV(1-α/2;n-1)

**Beispiel 15** (Fortsetzung): Für das Konfidenzintervall von $\bar{x}$=16,1062gon und σ=0,5mgon wird mit $n$=4 und α=0,05 folgendes Konfidenzintervall erhalten:

$$c = \frac{0{,}5\text{mgon}}{\sqrt{4}} \cdot 1{,}96 = 0{,}5\text{mgon}$$

[ 16,1062 - 0,0005 ; 16,1062 + 0,0005 ] gon = [ 16,1057 ; 16,1067 ] gon

Dieses Intervall überdeckt den Erwartungswert der Messgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

**Aufgabe 5** (Fortsetzung): Berechnen Sie zum Konfidenzniveau 99% das Konfidenzintervall des Mittelwertes der Lattenablesungen sowohl ohne Eliminierung grob falscher Messwerte, als auch nach der Eliminierung. Überlegen Sie, warum das Konfidenzintervall sich trotz Eliminierung grob falscher Messwerte vergrößert. Berechnen Sie dasselbe Konfidenzintervall für den Fall, dass σ=0,1mm unbekannt oder zu unsicher ist und nicht verwendet werden soll, weshalb nun keine Eliminierung grob falscher Messwerte nach der 3σ-Regel erfolgen kann.

## 3.6 MESSUNSICHERHEIT

Ziel des Schätzens von Messunsicherheiten sollte es sein, Intervalle festzulegen, die die **wahren** Werte der Messgrößen einschließen oder „lokalisieren“ sollen. Die Standardabweichung σ oder die Varianz $\sigma^2$ beschreiben lediglich die Abweichung eines Messergebnisses vom Erwartungswert! Auch Konfidenzintervalle beziehen sich immer nur auf den Erwartungswert, weil diese allein mit der Standardabweichung operieren (↗Abschnitt 3.5). Wenn wahrer Wert und Erwartungswert voneinander abweichen, d.h. **wenn systematische Messabweichungen vorliegen, liefern diese Genauigkeitskenngrößen ein zu optimistisches Bild**. Die Berechnung von $\hat{\sigma}$ nach Abschnitt 3.2 stützt sich nämlich ausschließlich auf die Variabilität der Messwerte untereinander. Systematische Messabweichungen erzeugen aber solch eine Variabilität gar nicht.

Durch immerhin betragsmäßiges Abschätzen der vermutlichen Größe der systematischen Messabweichungen Δ aus der vielleicht langjährigen Erfahrung des Ingenieurs könnte es möglich sein, zu einer realistischeren Genauigkeitskenngröße zu gelangen, die auch systematische Messabweichungen einschließt. Man nennt sie die **Messunsicherheit**

$$u = \sigma + |\Delta| \quad \text{bzw.} \quad \hat{u} = \hat{\sigma} + |\Delta|$$

**Beispiel 15** (Fortsetzung): Die vier Richtungsmessungen könnten systematische Messabweichungen enthalten, z.B. durch einen Stehachsfehler des Tachymeters oder durch einen systematischen Anzielfehler. Wurde das Ziel systematisch (d.h. viermal) um $\Delta = E\{x\} - \tilde{x} = +0{,}01$ gon falsch angezielt, liegen die wahren Messabweichungen im Bereich von 0,01 gon. Die berechnete Standardabweichung $\hat{\sigma}$=0,98mgon liefert ein völlig falsches Bild von der tatsächlichen Genauigkeit der Messung. Außerdem wäre das 95%-Konfidenzintervall für den wahren Wert $\tilde{x}$ mit [16,1157;16,1167]gon deutlich verschieden vom zuvor berechneten Intervall. Allerdings ist diese Rechnung praktisch nicht durchführbar, weil $\Delta$ unbekannt ist. Sonst hätte man diesen Wert schon als Korrektion an die Messwerte angebracht und hätte gleich das Ergebnis [16,1157;16,1167]gon erhalten. Hätte ein sachverständiger Ingenieur die vermutliche Größe der systematischen Messabweichungen auf 5 mgon beziffert, wäre er zu einer Messunsicherheit

$$u = 0{,}5\text{mgon} + 5\text{mgon} = 5{,}5\text{mgon} \quad \text{bzw.} \quad \hat{u} = 0{,}98\text{mgon} + 5\text{mgon} = 6{,}0\text{mgon}$$

gelangt.

In der Praxis arbeitet man oft mit der **erweiterten Messunsicherheit**. Dabei wird die Messunsicherheit mit einem Faktor $k$ multipliziert. Üblich ist $k$=2. Dieser Faktor muss immer zusammen mit der erweiterten Messunsicherheit angegeben werden.

Im Rahmen der internationalen Standardisierung der Metrologie wurde im Jahr 1993 der „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" (GUM) geschaffen. Die letzte Überarbeitung stammt aus dem Jahr 2008. Maßgebliche deutsche Fassung ist die Vornorm DIN V ENV 13005 (aktuelle Ausgabe:1999-06) „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen". Ziel des GUM ist eine international einheitliche Vorgehensweise beim Ermitteln und Angeben von Messunsicherheiten, um Messergebnisse weltweit vergleichbar zu machen. In der Geodäsie spielt der GUM bisher leider eine geringe Rolle.

Eine Revision des GUM wurde im Jahr 2014 begonnen.

## 3.7 MAXIMALFEHLER UND TOLERANZEN

Aus der Normalverteilung ist ablesbar, dass die wahren zufälligen Messabweichungen das Dreifache der Standardabweichung σ nur sehr selten übersteigen. Deshalb wird der Wert 3σ als **Maximalfehler** festgelegt. Die Benutzung dieser Genauigkeitskenngröße ist allerdings selten, weil dadurch dem Nutzer ein zu pessimistisches Bild der Genauigkeitssituation vermittelt wird.

Die **Maßtoleranz** ist eine konstruktions- und fertigungsbedingte Maßgröße im Bauwesen, im Maschinenbau und in anderen Zweigen der Fertigungsindustrie. Sie bezeichnet die Differenz zwischen dem oberen und dem unteren Grenzmaß, das sind Höchst- und Mindestmaß eines Bauwerkes oder Werkstücks. Das Sollmaß wird auch als Nennmaß bezeichnet (Abbildung 8). Die zulässigen Abweichungen vom Nennmaß sind die Grenzabmaße. Oft sind unteres und oberes Grenzabmaß gleich groß. Das tatsächliche Abmaß (Nennmaß minus Istmaß) muss kleiner als das Grenzmaß sein, sonst erfüllt das Bauwerk oder Werkstück die Anforderungen nicht.

Die Einhaltung von Maßtoleranzen muss durch Messungen kontrolliert werden. Dabei ist wichtig, dass sowohl

- keine echte Toleranzüberschreitungen unerkannt bleiben (das ist das sogenannte Konsumentenrisiko), als auch
- keine vermeintliche Toleranzüberschreitungen bei qualitätsgerechten Produkten festgestellt werden (das ist das sogenannte Produzentenrisiko).

Deshalb muss die Messung ausreichend genau sein. Damit das Istmaß mit der Wahrscheinlichkeit α im Toleranzbereich liegt, muss das Konfidenzintervall vollständig im Toleranzbereich enthalten sein, d.h.

Mindestmaß < untere Vertrauensgrenze < Messergebnis < obere Vertrauensgrenze < Höchstmaß

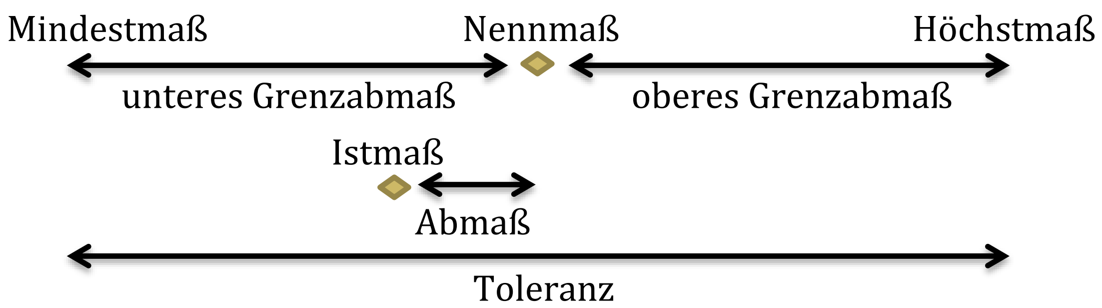


**Abbildung 8: Maßtoleranz und Grenzmaße**

# 4 KORRELATIONEN UND KOVARIANZEN

## 4.1 KORRELATION

Messwerte mit zufälligen Messabweichungen und aus solchen Messwerten berechnete Größen sind wie gesagt Zufallsvariable. Diese können **statistische Abhängigkeiten** aufweisen. Das bedeutet, diese Zufallsvariablen nehmen ihre Werte manchmal nicht losgelöst voneinander an, sondern es gibt eine gegenseitige Beeinflussung. Typisch sind folgende drei Fälle:

1. Die zufälligen Messabweichungen zweier Messwerte neigen dazu, **gleiches** Vorzeichen zu besitzen. Man spricht von **positiver Korrelation**.
2. Die zufälligen Messabweichungen zweier Messwerte neigen dazu, **entgegengesetztes** Vorzeichen zu besitzen. Man spricht von **negativer Korrelation**.
3. Die zufälligen Messabweichungen zweier Messwerte weisen keine solche Neigung auf. Hier liegt keine Korrelation vor.

Korrelationen sind die wichtigste Form von statistischen Abhängigkeiten. Für die Ausgleichung geodätischer Messungen sollte man wissen, ob Messwerte korreliert sind oder nicht.

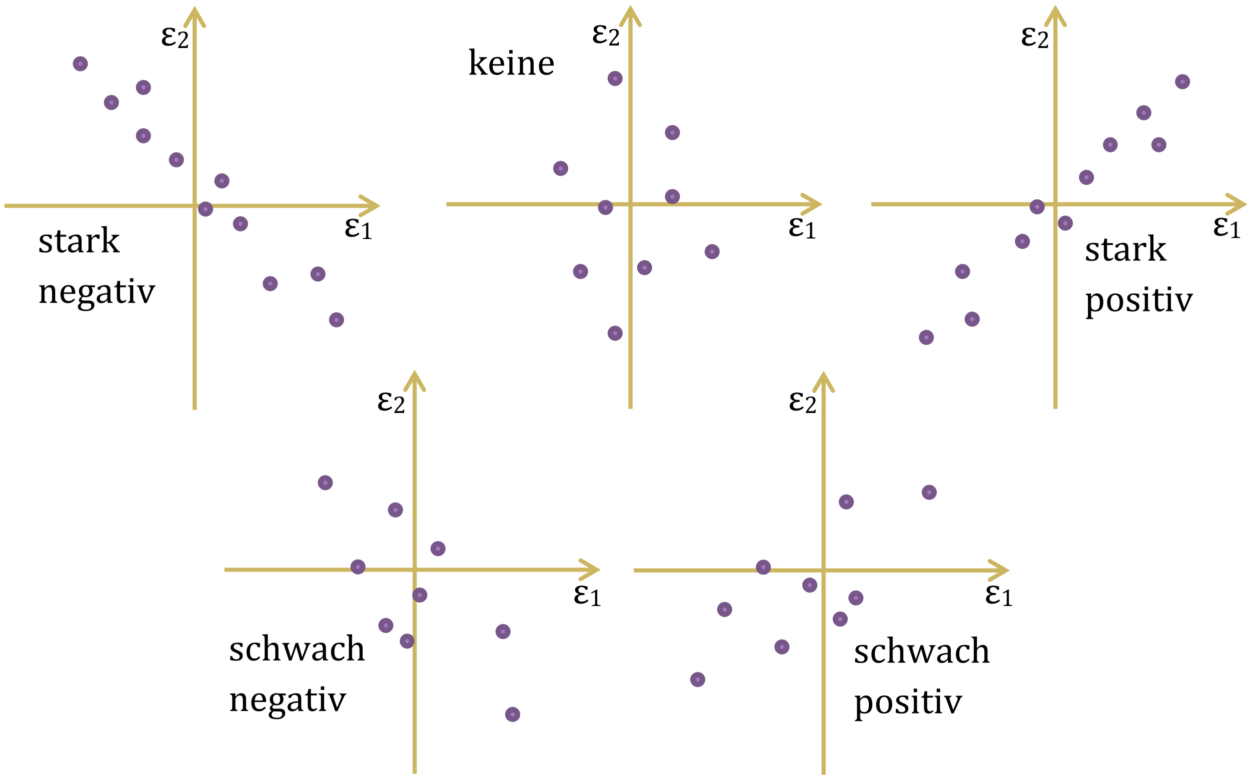


**Abbildung 9:** verschiedene Arten der Korrelation zweier zufälliger Messabweichungen $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2$

Solche Abhängigkeiten zwischen Messwerten kommen auf zweierlei Arten zustande:

## 4.2 PHYSIKALISCHE ABHÄNGIGKEITEN

Die zufälligen Prozesse, welche Messabweichungen hervorrufen, hängen auf physikalische Weise zusammen, nämlich

1. über gegenseitige Beeinflussungen in ein und demselben Messinstrument oder
2. über gemeinsame Messbedingungen.

**Beispiel 18**: In einem Tachymeter werden gleichzeitig Horizontalrichtung und Zenitwinkel gemessen.

1. Einige Bauteile dieses Messinstruments werden für beide Messungen genutzt. So könnte es zu einer gegenseitigen Beeinflussung und damit zur statistischen Abhängigkeit zwischen den Messabweichungen und somit letztlich auch zwischen den Messwerten von Horizontalrichtung und Vertikalwinkel zu einem Zielpunkt kommen.
2. Durch schlechte Messbedingungen könnte verursacht werden, dass der Zielpunkt zufällig falsch angezielt wird, allerdings häufig entweder zu weit links oben oder zu weit rechts unten. Auch hier ist eine statistische Abhängigkeit die Folge, in diesem Fall kommt es zu positiver Korrelation.

Physikalische Abhängigkeiten sind zahlenmäßig praktisch sehr schwer zu erfassen. Häufig ist das sogar völlig unmöglich. Deshalb werden solche Abhängigkeiten fast immer vernachlässigt. Jedenfalls achtet man beim Bau von Instrumenten und beim Messen darauf, dass physikalische Abhängigkeiten vermieden werden. **Ursprüngliche Messwerte können somit als unkorrelierte Zufallsvariable aufgefasst werden**.

## 4.3 MATHEMATISCHE ABHÄNGIGKEITEN

Betrachteten wir  zwei Zufallsvariablen, die selbst keine ursprünglichen Messwerte sind, sondern aus Messwerten **berechnete** Größen. Eine gegenseitige Beeinflussung könnte vorliegen, wenn dieselben ursprünglichen Messwerte in beide Größen eingeflossen sind.

**Beispiel 19**: Auf einem Standpunkt wurden drei Richtungen $r_1, r_2, r_3$ gemessen (Abbildung 10). Diese weisen keine physikalische Abhängigkeit auf. Bei den Winkeln

$$\alpha = r_2 - r_1, \;\; \beta = r_3 - r_2$$

liegt aber eine mathematische Abhängigkeit vor. Grund: Der Messwert $r_2$ ist sowohl für α, also auch für β benutzt worden. Wurde $r_2$ zufällig zu klein gemessen (zufällige Messabweichung negativ), neigt α dazu, ebenso kleiner als sein wahrer Wert zu sein, und β größer. Wurde $r_2$ zu groß gemessen (zufällige Messabweichung positiv), so ist es häufig umgekehrt. (Das ist aber keineswegs immer so, weil der Effekt durch die Messabweichung in den anderen Richtungen $r_1, r_3$ mehr als aufgehoben sein kann, aber immerhin passiert es häufig.) Somit erkennt man, dass α und β negativ korreliert sind.

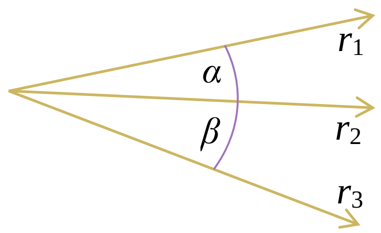


**Abbildung 10**: (zu Beispiel **19**) Richtungs- und Winkelmessungen

**Aufgabe 7**: Betrachten Sie das Liniennivellement aus Abbildung 6. Die ursprünglichen Messwerte sind hier die Lattenablesungen (Vorblicke $v$ und Rückblicke $r$). Nehmen Sie an, die Anfangshöhe von Punkt A sei exakt bekannt und man berechnet daraus die Höhen der anderen drei Punkte. Sind diese Höhen untereinander paarweise positiv oder negativ korreliert oder unkorreliert? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

## 4.4 KOVARIANZ UND KORRELATIONSKOEFFIZIENT

Zur mathematischen Beschreibung der Korrelationen dienen **Kovarianzen**. Sind $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ die zufälligen Messabweichungen zweier Größen, so berechnet man deren Kovarianz als

$$\sigma_{12} = E\{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2\}$$

Bei positiver Korrelation der beiden Größen ist $\sigma_{12} > 0$, bei negativer Korrelation ist $\sigma_{12} < 0$, sonst $\sigma_{12} = 0$.

1. Bei physikalischer Abhängigkeit muss wie gesagt meist der Fall $\sigma_{12} = 0$ angenommen werden, obwohl er streng genommen nicht vorliegt.
2. Bei mathematischer Abhängigkeit kann die Kovarianz aus der funktionalen Abhängigkeit von den ursprünglichen Messwerten hergeleitet werden. Das ist mit dem **Kovarianzfortpflanzungsgesetz** möglich, welches hier nicht behandelt wird.

Wenn ausgedrückt werden soll, wie stark oder schwach eine Korrelation ist, berechnet man den **Korrelationskoeffizient**

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

wobei $\sigma_1$ und $\sigma_2$ die Standardabweichungen der beiden Größen sind. Der Korrelationskoeffizient liegt zwischen -1 und 1. Die absolut stärkste Korrelation liegt bei $\rho = \pm 1$ vor. Das bedeutet, dass die zufälligen Messabweichungen $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ in Abbildung 9 exakt Punkte auf einer Geraden bilden.

| negativ korreliert | | unkorreliert | positiv korreliert | | |
|---|---|---|---|---|---|
| stark | schwach | | schwach | stark | |
| -1 | | 0 | | 1 | ρ |

Beispiel 19 (Fortsetzung): Betrachten wir die zufälligen Messabweichungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ der drei Richtungen $r_1, r_2, r_3$. Die resultierenden Messabweichungen der Winkel sind

$$\varepsilon_\alpha = \tilde{\alpha} - \alpha = (\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) - (r_2 - r_1) = (\tilde{r}_2 - r_2) - (\tilde{r}_1 - r_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_\beta = \tilde{\beta} - \beta = (\tilde{r}_3 - \tilde{r}_2) - (r_3 - r_2) = (\tilde{r}_3 - r_3) - (\tilde{r}_2 - r_2) = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$$

Somit hat man

$$\sigma_{\alpha\beta} = E\{\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta\} = E\{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\} = E\{(\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)\}$$

$$= E\{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3\} - E\{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_3\} - E\{\varepsilon_2^2\} + E\{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2\} = \sigma_{23} - \sigma_{13} - \sigma_2^2 + \sigma_{12}$$

(Hier werden Grundkenntnisse im Rechnen mit Erwartungswerten vorausgesetzt.) Weil die Richtungen ursprüngliche Messwerte sind, werden sie als unkorrelierte Zufallsvariable aufgefasst, so dass die Kovarianzen Null sind: $\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$. Wir erhalten

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\sigma_2^2 < 0$$

Hierin drückt sich die schon festgestellte negative Korrelation aus. Weiter ist

$$\sigma_\alpha^2 = E\{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2\} = E\{\varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1^2\}$$

$$= E\{\varepsilon_2^2\} - 2E\{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2\} + E\{\varepsilon_1^2\} = \sigma_2^2 - 0 + \sigma_1^2$$

und auf dieselbe Weise

$$\sigma_\beta^2 = \sigma_3^2 + \sigma_2^2$$

so dass schließlich

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta} = \frac{-\sigma_2^2}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \cdot \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_2^2}}$$

Sind alle drei Richtungen gleich genau, haben also dieselbe Standardabweichung $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, so ergibt sich

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta} = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma^2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2}} = -\frac{1}{2}$$

**Aufgabe 8**: Wenn in Beispiel 19 $r_2$ ungenauer als $r_1$ und $r_3$ gemessen wurde, wird die Korrelation von α und β dann stärker oder schwächer oder bleibt sie gleich? Wie ergibt sich das aus den Formeln von Beispiel 19? Erläutern Sie anschaulich, warum das so ist.

Die Berechnung von Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten kann a priori erfolgen wie im vorangegangenen Beispiel, oder auch a posteriori, also aus Messwerten geschätzt. Darauf gehen wir an dieser Stelle nicht ein.

Wenn Größen unkorreliert sind, kann man noch nicht behaupten, dass es überhaupt keine statistischen Abhängigkeiten gäbe. Es können trotzdem welche bestehen, die an dieser Stelle aber keine Rolle spielen. Außerdem ist das nur dann möglich, wenn Zufallsvariable nicht normalverteilt sind.

Fazit: Für normalverteilte Zufallsvariable bedeutet Unkorreliertheit immer auch statistische Abhängigkeit. Man spricht von „unabhängigen Zufallsvariablen“.

# 5 ZUSAMMENFASSUNG

Die Theorie der geodätischen Messabweichungen ist grundlegend für das Verständnis der Ausgleichungsrechnung, die die wissenschaftliche Grundlage für die Auswertung geodätischer Messungen ist. Man unterscheidet drei klassische Arten von Messabweichungen: zufällige, systematische und grobe. Alle drei haben unterschiedliche Ursachen und müssen mit unterschiedlichen Mitteln und Methoden bekämpft werden.

Zu einer vollständigen geodätischen Messung gehört eine Genauigkeitsbewertung. Wenn diese fehlt, macht sich der Nutzer notgedrungen seine eigenen Vorstellungen von dieser Genauigkeit und kommt vielleicht zu einem falschen Bild. Ohne Genauigkeitsbewertung sind Messungen wertlos.

In der Geodäsie werden eine Vielzahl unterschiedlicher Genauigkeitskenngrößen verwendet: u.a. Standardabweichungen, Breiten von Konfidenzintervallen und Messunsicherheiten. Diese existieren auch noch in gewissen Modifikationen, z.B. a priori und a posteriori, in verschiedenen Konfidenzniveaus und mit verschiedenen Erweiterungsfaktoren. Damit die Genauigkeitsbewertung nicht zu Irrtümern führt, muss genau angeben werden, welche Genauigkeitskenngrößen verwendet wurden. Außerdem sind die Kenngrößen zu verwenden, die sich für den jeweiligen Zweck am besten eignen.

Genauigkeitsangaben von Instrumenten- und Geräteherstellern erfüllen oft diese Forderungen nicht. Tatsächlich geben viele Hersteller Genauigkeiten oft so an, dass diese recht optimistisch erscheinen, um sich gegenüber der Konkurrenz einen Vorteil zu verschaffen. Um trotzdem keine unwahren Angaben zu machen, werden diese bewusst unvollständig gelassen, und es werden Genauigkeitskenngrößen ausgewählt, die optimistisch klingen, aber für den Anwender ungeeignet sind. Diese Praxis ist gefährlich, weil der Anwender dadurch in die Irre geführt wird. Fragen Sie immer genau nach, wenn unklar ist, um welche Art von Genauigkeitskenngrößen es sich handelt. Verlangen Sie standardisierte Kenngrößen wie die Messunsicherheit nach dem GUM.

Für die Ausgleichung geodätischer Messungen ist entscheidend, ob Zufallsvariable korrelierte oder unkorrelierte Größen sind. Im letzten Fall ist es von Vorteil, die Korrelationen zu kennen oder berechnen zu können.

# 6 LÖSUNGEN

*Zwischenergebnisse wurden sinnvoll gerundet, so können unbedeutende Abweichungen zur exakten Lösung entstehen.*

**Aufgabe 3**: 1,6%

**Aufgabe 5**: Die Messwerte 1,40101; 1,40150; 1,40279 müssen eliminiert werden. Fortsetzung in Abschnitt 3.2 und 3.5: $\hat{\sigma}$=0,47mm und $\hat{\sigma}$=0,14mm; $\bar{x}$ =1,40195m und $\bar{x}$ =1,40203m; $n$=10 und $n$=7; α=0,01; $c$=0,1mm/ $\sqrt{10} \cdot 2{,}58$=0,08mm und $c$=0,1mm/ $\sqrt{7} \cdot 2{,}58$=0,10mm; [1,40187; 1,40203]m und [1,40193; 1,40213]m; $c$=0,47/$\sqrt{10}\cdot 3{,}25$=0,48mm; [1,40147; 1,40243]

**Aufgabe 6**: $p_{\text{ANord}} = p_{\text{CNord}} = 1/9$, $p_{\text{AOst}} = p_{\text{COst}} = 1/4$, $p_{\text{AHöhe}} = p_{\text{CHöhe}} = 1/25$, $p_{\text{BNord}} = 1/36$, $p_{\text{BOst}} = 1/16$, $p_{\text{BHöhe}} = 1/100$ oder Vielfache davon.

Ich danke allen Studierenden der HTW Dresden, die mir halfen, Fehler in diesem Manuskript zu beseitigen. R. Lehmann