Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

**Fakultät Geoinformation**

**Internes Manuskript**

# Ausgleichungsrechnung I

Lehmann, R.

# Fehlerfortpflanzung

Dresden 2016

FV-06-02.2-2

Herausgeber:
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Friedrich-List-Platz 1
01069 Dresden

Autor:
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden
Fakultät Geoinformation

2. Auflage März 2016



Druck und buchbinderische Verarbeitung:
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

# INHALT


0 Einleitung ..... 3

1 Fortpflanzungsgesetze ..... 4

1.1 Fortpflanzung wahrer Messabweichungen ..... 4

1.2 Fortpflanzung maximaler Messabweichungen ..... 5

1.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen ..... 7

1.4 Fortpflanzung zufälliger Messabweichungen ..... 8

1.5 Kovarianzfortpflanzungsgesetz ..... 8

1.6 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz ..... 9

1.7 Gewichtsfortpflanzungsgesetz ..... 10

1.8 Mehrstufige Fehlerfortpflanzung ..... 11

2 Fehlerfortpflanzung - Analytische Methode ..... 12

2.1 Allgemeine Vorgehensweise ..... 12

2.2 Sonderfälle der Fehlerfortpflanzung ..... 12

2.3 Berechnung der resultierenden Genauigkeit von Ergebnisgrößen ..... 14

2.4 Berechnung der erforderlichen Genauigkeit von Messwerten ..... 18

2.5 Optimierung von Messungsanordnungen ..... 20

3 Fehlerfortpflanzung - Numerische Methode ..... 24

4 Gewichtsfortpflanzung ..... 28

5 Lösungen ..... 31

# 0 EINLEITUNG

In der Geodäsie werden nicht nur unbekannte Größen berechnet, sondern es wird auch abgeschätzt, wie sicher oder unsicher diese Größen erhalten werden. Berechnete Größen erben ihre Unsicherheiten, die sogenannten „Fehler“, von den Größen, aus denen sie berechnet werden. Diese Größen können gemessen sein und Messabweichungen besitzen oder aus anderen Größen berechnet sein und so ihre Unsicherheit wiederum geerbt haben. Man sagt, die „Fehler pflanzen sich fort“. Sowohl Verstärkung, als auch Abschwächung von Fehlern sind möglich.

Es ist wichtig, diese Fehlerfortpflanzung rechnerisch zu vollziehen, um

1. die Genauigkeiten berechneter Größen anzugeben,
2. die den Vorgaben entsprechende erforderliche Genauigkeit von Messwerten zu bestimmen und
3. Messungsanordnungen zu optimieren.

Diese drei Ziele werden durch Anwendung von Fortpflanzungsgesetzen erreicht.

Zum Verständnis dieses Manuskriptes sind detailierte Kenntnisse über geodätische Messabweichungen erforderlich. Bitte studieren Sie zunächst das Manuskript „Geodätische Messabweichungen“ von R. Lehmann. Sie finden es hier:

http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=library/entry&ID=Lehmann16

Verweise auf dieses Manuskript werden im Folgenden mit [GMabw] kenntlich gemacht. Außerdem empfehlenswert ist

http://www.in-dubio-pro-geo.de/?file=guide/errprop

Hier wird gezeigt, wie die geodätische Cloud Computing Software IN DUBIO PRO GEO benutzt werden kann, um Fehlerfortpflanzungen zu berechnen. Viele Beispiele und Aufgaben in diesem Manuskript können damit nachvollzogen oder bearbeitet werden.

# 1 FORTPFLANZUNGSGESETZE

## 1.1 FORTPFLANZUNG WAHRER MESSABWEICHUNGEN

Wir gehen von folgender Situation aus: Es liegen $n$ Messwerte $L_1, L_1, \dots, L_n$ vor. Diese sind mit wahren Messabweichungen $\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_n$ behaftet, d.h. für die wahren Werte $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n$ der Messgrößen gilt:

$$L_i = \tilde{L}_i + \eta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Nun berechnen wir aus diesen Messwerten eine Ergebnisgröße $X$ als Wert einer Funktion $f$ mit

$$X = f(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

Gesucht ist die resultierende wahre Abweichung von $X$:

$$\eta_X = X - \tilde{X}$$

$$= f(L_1, L_2, \dots, L_n) - f(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n)$$

$$= f\left(\tilde{L}_1 + \eta_1, \tilde{L}_2 + \eta_2, \dots, \tilde{L}_n + \eta_n\right) - f(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n)$$

Die Lösung dieses Problems liefert die Mathematik in Gestalt der **Taylor-Formel** für Funktionen mehrerer Variabler**:**

$$f\left(\tilde{L}_1 + \eta_1, \tilde{L}_2 + \eta_2, \dots, \tilde{L}_n + \eta_n\right) \approx f\left(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots, \tilde{L}_n\right) + \frac{\partial f}{\partial L_1}\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\eta_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial L_n}\eta_n$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Taylor-Formel#Taylor-Formel_im_Mehrdimensionalen

Diese Formel ist eine Näherungsformel und gilt umso besser, je kleiner die wahren Messabweichungen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sind. Praktisch gehen wir von sehr kleinen Messabweichungen aus, so dass wir im Weiteren „≈“ durch „=“ ersetzen. Die daraus abzuleitenden Fortpflanzungsgesetze gelten also nicht für grobe Messabweichungen. Im Kapitel 3 wird eine Methode gezeigt, die ohne die Taylor-Formel auskommt.

*Sollte Ihnen die Taylor-Formel nicht bekannt sein, können Sie diese Herleitung nicht nachvollziehen, aber immerhin noch ihr Ergebnis zur Kenntnis nehmen.*

Somit erhalten wir das **Fortpflanzungsgesetz für wahre Messabweichungen**:

$$\boxed{\eta_X = \frac{\partial f}{\partial L_1}\eta_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\eta_2 + \cdots \frac{\partial f}{\partial L_n}\eta_n}$$

**Beispiel 1**: Eratosthenes von Kyrene (276-195 v. Chr.) bestimmte den Erdumfang $U$ aus dem geozentrischen Winkel α zwischen Alexandria und Syene gleich 1/50 des

Vollwinkels und dem entsprechenden Bogen $b$ = 5000 Stadien (altägyptisches Längenmaß). ↗ Abbildung 1 . Leider ist nicht genau bekannt, in welcher der verschiedenen Stadienmaße dieser Wert angegeben wurde. Gehen wir von dem vermuteten Wert 1 Stadion = 157,5 m aus, so erhalten wir $b$ = 788 km. Heute kennen wir die wahren Werte für den Winkel $\tilde{\alpha}$ = 7,52° und für den Abstand zwischen Alexandria und Syene $\tilde{b}$ = 835 km. Wir berechnen die von Eratosthenes erhaltene wahre Abweichung des Erdumfangs $U$ durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes für wahre Messabweichungen auf die Funktion

$$U = b \cdot \frac{360°}{\alpha}$$

$$\eta_U = \frac{\partial U}{\partial b}\eta_b + \frac{\partial U}{\partial \alpha}\eta_\alpha = \frac{360°}{\alpha}\eta_b + \left(-b \cdot \frac{360°}{\alpha^2}\right)\eta_\alpha$$

$$= 50 \cdot (788 - 835)\text{km} + (-788\text{ km} \cdot 6{,}94) \cdot (7{,}2 - 7{,}52) = \underline{-600\text{ km}}$$

Eratosthenes bestimmte den Erdumfang also um 600 km zu kurz. Diese sensationell geringe Abweichung ist aber wie gesagt mit der Hypothese des verwendeten Stadionmaßes behaftet.

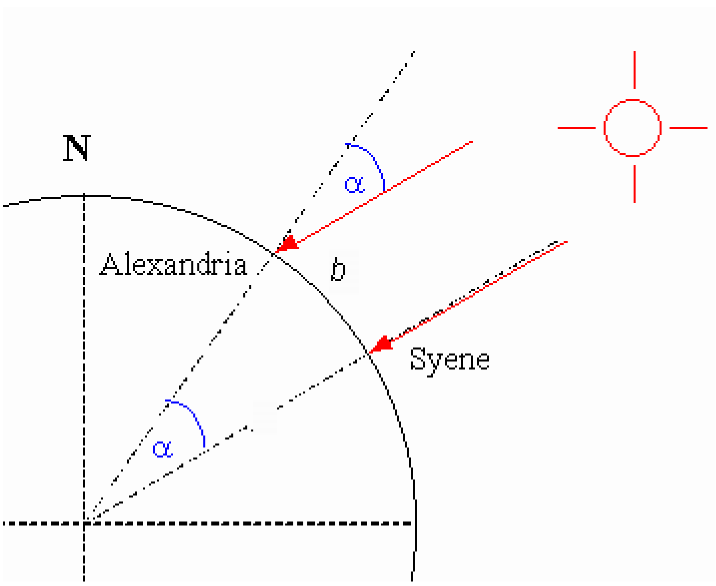



**Abbildung 1:** Bestimmung des Erdumfangs durch Eratosthenes (zu **Beispiel 1**)
http://www.pimath.de/geo/geo1.html

## 1.2 FORTPFLANZUNG MAXIMALER MESSABWEICHUNGEN

In der Praxis ist das Fehlerfortpflanzungsgesetz für wahre Messabweichungen von geringer Bedeutung, weil wahre Messabweichungen $\eta_i$ genauso wie wahre Werte $\tilde{L}_i$ letztlich unbekannt sind. Gelegentlich kann man aber den absoluten Beträgen wahrer Messabweichungen **Maximalwerte** $\eta_i^{\max}$ zuschreiben. Damit kann man Maximalwerte auch für die Abweichungen von Funktionswerten erhalten: Im **ungünstigsten Fall**, dass alle Messabweichungen  zugleich ihre Maximalbeträge annehmen und ihre Wirkung auf die Ergebnisgröße *X* mit gleichem Vorzeichen ausüben, erhält man den maximalen Abweichungsbetrag für *X*. Es ergibt sich das **Fortpflanzungsgesetz für maximale Messabweichungen**:

$$\boxed{\eta_X^{\max} = \left|\frac{\partial f}{\partial L_1}\right| \eta_1^{\max} + \left|\frac{\partial f}{\partial L_2}\right| \eta_2^{\max} + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial L_n}\right| \eta_n^{\max}}$$

**Beispiel 1** (Fortsetzung): Nach der Methodik von Eratosthenes hätten zweifellos maximale Messabweichungen von $\eta_b^{\max} = 100$ km und $\eta_\alpha^{\max} = 0.8°$ auftreten können. (Syene liegt z.B. nicht, wie Eratosthenes meinte, genau auf dem nördlichen Wendekreis, sondern 0,5° nördlich.) Somit erhalten wir eine maximale Abweichung des Radiuses von

$$\eta_U^{\max} = \left|\frac{\partial U}{\partial b}\right| \eta_b^{\max} + \left|\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right| \eta_\alpha^{\max} = 50 \cdot 100 \text{ km} + (\ 788 \text{ km} \cdot 6{,}94) \cdot 0{,}8 = \underline{9400 \text{ km}}$$

Die vermutete geringe wahre Abweichung von nur -600 km ist also dem Zufall zu verdanken.

Das Fortpflanzungsgesetz für maximale Messabweichungen spielt in der Praxis nur eine geringe Rolle, weil vor allem bei großen Messaufgaben Maximalbeträge schnell enorm anwachsen und die Wahrscheinlichkeit, dass alle tatsächlich von den wahren Abweichungen erreicht werden, sehr gering ist.

**Beispiel 2**: Bei einem Liniennivellement (Abbildung 2) mit *k* Stationsaufstellungen sind Zielweiten von 50 m und Messabweichungen in den Lattenablesungen $\mathrm{r_i}, \mathrm{v_i}$ von maximal 1 mm anzunehmen. Der Höhenunterschied zwischen Anfangs- und Endpunkt

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{k} r_i - v_i$$

erhält daraus eine maximale Abweichung von

$$\begin{aligned} \eta_{\Delta h}^{\max} &= \left|\frac{\partial \Delta h}{\partial r_1}\right| \cdot 1 \text{ mm} + \left|\frac{\partial \Delta h}{\partial v_1}\right| \cdot 1 \text{ mm} + \cdots + \left|\frac{\partial \Delta h}{\partial v_k}\right| \cdot 1 \text{ mm} \\ &= \ 2k \cdot 1 \text{ mm} \end{aligned}$$

Für einen 1000 m langen Nivellementsweg ergibt sich *k* = 1000/(2·50) = 10 und $\eta_{\Delta h}^{\max} =$ 20mm. Diese sehr schlechte Genauigkeit wird aber tatsächlich nur erreicht, wenn 20 mal der ungünstigste Fall |η| = 1 mm eingetreten ist, was sehr unwahrscheinlich ist.

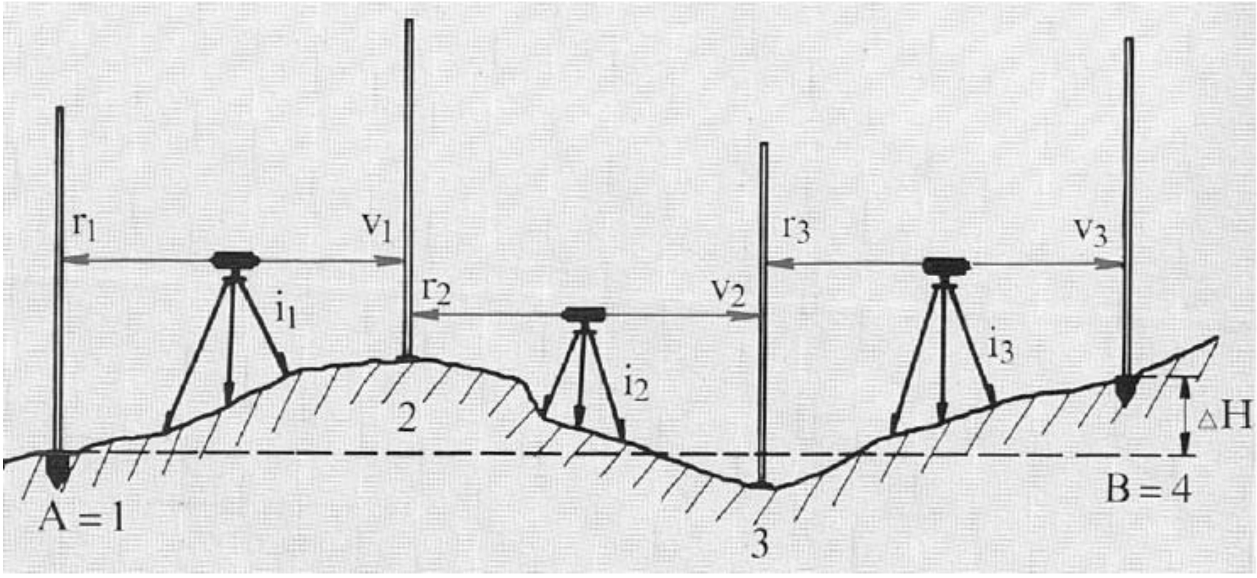



**Abbildung 2:** zu **Beispiel 2**.

## 1.3 FORTPFLANZUNG SYSTEMATISCHER MESSABWEICHUNGEN

Wir fassen kurz die wichtigsten Rechenregeln für Erwartungswerte zusammen: Sind $X$ und $Y$ Zufallsvariable und $a$ und $b$ nicht-zufällige reelle Zahlen, gilt:

$$E\{aX + bY\} = aE\{X\} + bE\{Y\}, \quad E\{a\} = a, \quad E\{aX\} = aE\{X\}$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Erwartungswert#Linearit.C3.A4t

Wenn wir grobe Messabweichungen aus dem genannten Grund aus der Betrachtung ausschließen, dann erhalten wir mit dem aus der Theorie der Messabweichungen [↗GMabw, Abschnitt 1.3] bekannten Gesetz

$$E\{\eta\} = E\{\Delta + \varepsilon\} = \Delta + E\{\varepsilon\} = \Delta$$

(denn zufällige Messabweichungen $\varepsilon$ „mitteln sich heraus", systematische Messabweichungen $\Delta$ aber nicht) angewendet auf das Fortpflanzungsgesetz für wahre Messabweichungen auf beiden Seiten der Gleichung das **Fortpflanzungsgesetz für systematische Messabweichungen**:

$$\boxed{\Delta_X = \frac{\partial f}{\partial L_1}\Delta_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial L_n}\Delta_n}$$

**Beispiel 3**: Bei einem Distanzmesser gibt es einen sogenannten „Nullpunktfehler", der eine systematische Messabweichung darstellt. Bei einem Rechteck 14,02 m × 23,06 m werden mit einem Distanzmesser mit Nullpunktfehler Δ = -2,9 mm die Seitenlängen gemessen. Für den Flächeninhalt $F = a \cdot b$ ergibt sich daraus eine systematische Abweichung von

$$\Delta_F = \frac{\partial F}{\partial a}\Delta_a + \frac{\partial F}{\partial b}\Delta_b = b \cdot (-2{,}9\ \mathrm{mm}) + a \cdot (-2{,}9\ \mathrm{mm}) = -0{,}11\ \mathrm{m}^2$$

⚠ *Beachten Sie, wie groß diese Abweichung ist, trotz sehr kleinem Nullpunktfehler.*

## 1.4 FORTPFLANZUNG ZUFÄLLIGER MESSABWEICHUNGEN

Wenn wir grobe Messabweichungen aus dem genannten Grund aus der Betrachtung ausschließen, dann erhalten wir mit dem aus der Theorie der Messabweichungen [↗GMabw, Abschnitt 1.3] bekannten Gesetz

$$\varepsilon = \eta - \Delta$$

und Differenzbildung der Fortpflanzungsgesetze für wahre und systematische Messabweichungen das **Fortpflanzungsgesetz für zufällige Messabweichungen**:

$$\boxed{\varepsilon_X = \frac{\partial f}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial L_n}\varepsilon_n}$$

In dieser Form kann es praktisch nicht benutzt werden, weil die zufälligen Messabweichungen unbekannt sind. Anders als bei systematischen Messabweichungen haben wir jetzt aber die Möglichkeit, von den Gesetzen des Zufalls zu profitieren: Wir müssen nicht wie bisher die Messabweichungen zahlenmäßig kennen, um Aussagen darüber machen zu können. Das wird in den nächsten beiden Abschnitten beschrieben.

## 1.5 KOVARIANZFORTPFLANZUNGSGESETZ

Vom Fortpflanzungsgesetz für zufällige Messabweichungen gehen wir zu Varianzen [↗GMabw, Abschnitt 3.3] und Kovarianzen [↗GMabw, Abschnitt 4.4] über, indem wir auf beiden Seiten quadrieren und Erwartungswerte bilden:

$$E\{\varepsilon_X^2\} = E\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial L_2}\varepsilon_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial L_n}\varepsilon_n\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 \varepsilon_n^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)\varepsilon_1\varepsilon_2 + \cdots + 2\left(\frac{\partial f}{\partial L_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\right\}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 E\{\varepsilon_1^2\} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 E\{\varepsilon_n^2\} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)E\{\varepsilon_1\varepsilon_2\} + \cdots$$
$$+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial L_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)E\{\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\}$$

Mittels der Definition von Varianzen $\sigma_i^2 = E\{\varepsilon_i^2\}$ und Kovarianzen $\sigma_{ij} = E\{\varepsilon_i\varepsilon_j\}$ gelangen wir zum **Kovarianzfortpflanzungsgesetz**:

$$\boxed{\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)\sigma_{12} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)\sigma_{n-1,n}}$$

Hat man die Kovarianzfortpflanzung für mehrere Ergebnisgrößen $X_1, X_2, \dots, X_m$ zu berechnen, so muss man dieses Gesetz $m$-mal anwenden. Wenn man Varianzen und Kovarianzen der Beobachtungen $L_1, L_2, \dots, L_n$ zu einer sogenannten **Kovarianzmatrix** $\Sigma_{LL}$ und die Ableitungen zu einem Matrix $F$ folgendermaßen zusammenfasst:

$$\Sigma_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \sigma_{3n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial L_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial L_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial L_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial L_n} \end{pmatrix}$$

kann man das Kovarianzfortpflanzungsgesetz in folgender **Matrixform** schreiben:

$$\boxed{\Sigma_{XX} = F \Sigma_{LL} F^T}$$

Hierfür benötigen Sie die Kenntnis der Matrizenmultiplikation.

https://de.wikipedia.org/wiki/Matrizenmultiplikation

Die Matrix $\Sigma_{XX}$ enthält auf der Hauptdiagonale die Varianzen $\sigma_X^2$ für alle $m$ Ergebnisgrößen und auf den Nebendiagonalen die Kovarianzen, ist also die **Kovarianzmatrix** dieser Ergebnisgrößen $X_1, X_2, \dots, X_m$, die man zu einem Zufallsvektor $X$ zusammenfasst.

**Aufgabe 1**: Überzeugen Sie sich durch Ausmultiplizieren der Matrizenmultiplikation, dass die Matrixform tatsächlich identisch mit der zunächst erhaltenen Form des Kovarianzfortpflanzungsgesetzes ist.

## 1.6 GAUßSCHES FEHLERFORTPFLANZUNGSGESETZ

Häufig tritt in der Praxis der Fall auf, dass es zwischen den zufälligen Messabweichungen der an der Kovarianzfortpflanzung beteiligten $n$ Messwerten $L_1, L_2, \dots, L_n$ **keine Korrelationen** gibt. Das ist z.B. dann der Fall, wenn es sich um ursprüngliche Messwerte räumlich und zeitlich getrennter Messsysteme handelt, die weder physikalisch noch mathematisch korreliert sein können [GMabw Abschnitt 4.2].

Noch häufiger sind solche Korrelationen zwar nicht ausgeschlossen, aber unbekannt. Besonders physikalische Korrelationen sind zahlenmäßig schwer zu erfassen. Man kann zeigen, dass es in diesem Fall sinnvoll ist, vom unkorrelierten Fall auszugehen: Für alle Kovarianzen wird

$$\sigma_{ij} = 0$$

angenommen und das Kovarianzfortpflanzungsgesetz vereinfacht sich zum **Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\boxed{\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 \sigma_n^2}$$

oder in anderer Schreibweise

$$\sigma_X = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 \sigma_n^2}$$

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz hat praktisch große Bedeutung, auch wenn es auf einigen weit reichenden Annahmen beruht. Diese fassen wir hier nochmals zusammen:

1. Die Standardabweichungen aller Messwerte müssen bekannt sein.
2. Bei nichtlinearen Funktionen $f$ müssen die Standardabweichungen aller Messwerte ausreichend klein sein.
3. Systematische und grobe Messabweichungen werden nicht berücksichtigt.
4. Es dürfen keine Korrelationen zwischen den Messwerten vorliegen oder diese müssen so gering sein, dass sie vernachlässigt werden können.

In den Kapiteln 2 und 3 werden wir uns anhand von Beispielen praktischen Aspekten dieses Gesetzes zuwenden.

## 1.7 GEWICHTSFORTPFLANZUNGSGESETZ

Häufig sind nur **relative** Genauigkeiten von Messwerten bekannt, die durch Gewichte $p_i$ [↗GMabw, Abschnitt 3.4] ausgedrückt werden:

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

$\sigma_0^2$ ist der hier unbekannte Varianzfaktor. Ist man nur an der Berechnung von Gewichten interessiert, kann das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz entsprechend umgeschrieben werden:

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_X} = \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{p_1} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 \frac{\sigma_0^2}{p_n}$$

Nun wird $\sigma_0^2$ aus der Gleichung eliminiert und man erhält das Gewichtsfortpflanzungsgesetz:

$$\frac{1}{p_X} = \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}$$

Es basiert auf denselben Voraussetzungen wie das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz, es ist nur für relative Genauigkeiten ausgedrückt, nicht für absolute. Es kann daher auch dann angewendet werden, wenn absolute Genauigkeiten unbekannt sind.

Im Kapitel 4 werden wir uns anhand von Beispielen praktischen Aspekten dieses Gesetzes zuwenden.

## 1.8 MEHRSTUFIGE FEHLERFORTPFLANZUNG

Am anschaulichsten ist es, wenn man sich zu jeder Fehlerfortpflanzungsaufgabe einen „Stammbaum" skizziert. Wenn es die Berechnung vereinfacht, kann man größere Fehlerfortpflanzungen meist auch in mehrere Stufen zerlegen, indem man geeignete Zwischengrößen einfügt. In Abbildung 3 ist $L_4$ eine solche Zwischengröße und die Berechnung erfolgt zweistufig: Zunächst pflanzen sich die Messabweichungen von $L_2$ und $L_3$ nach $L_4$ fort, und dann von $L_1$ und $L_4$ nach $X$.

Dann wäre $L_4$ im engeren Sinne aber kein „Messwert". Tatsächlich ist nicht nötig, dass die bisher sogenannten „Messwerte" $L_1, L_2, \ldots, L_n$ im engeren Sinne „gemessen" sind. Es reicht aus, dass sie mit zufälligen Abweichungen behaftete, unkorrelierte Größen sind. Das können auch Größen sein, die durch Rechnung aus ursprünglichen Messwerten erhalten wurden. Nur sollte kein ursprünglicher Messwert in mehr als eine Größe $L_1, L_2, \ldots, L_n$ eingeflossen sein, sonst sind mathematische Korrelationen die Folge.

Wir werden also $L_1, L_2, \ldots, L_n$ im Folgenden allgemein als „Eingangsgrößen" bezeichnen, die Messwerte sein können, oder auch andere unkorrelierte, aus Messwerten berechnete Zufallsvariable.

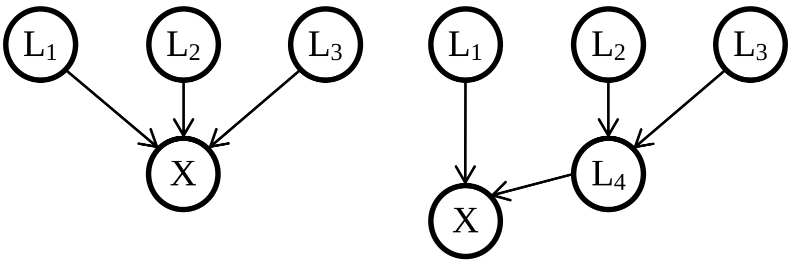



**Abbildung 3:** Stammbäume zu einer Fehlerfortpflanzungsaufgabe

# 2 FEHLERFORTPFLANZUNG - ANALYTISCHE METHODE

## 2.1 ALLGEMEINE VORGEHENSWEISE

Bei der analytischen Methode wird davon ausgegangen, dass die Funktion $f$ als Formel vorliegt und analytisch differenziert werden kann. Wiederholen Sie notfalls das analytische Differenzieren von Funktionen mehrerer Variabler („partielle Ableitung").

https://de.wikipedia.org/wiki/Partielle_Ableitung

⚠ *Bekanntlich ist die Ableitung von sin(x) gleich cos(x). Das gilt aber nur, wenn x im Bogenmaß eingesetzt wird, wie es der mathematische Standard ist. Die Ableitung von sin(α) mit α in Gon ist hingegen cos(α)/ρ mit ρ=200gon/π! (Es ist nach der Kettenregel noch eine „innere Ableitung" für die Winkelumrechnung zu berücksichtigen.) Die Ableitung von cos(α) mit α in Gon ist folglich -sin(α)/ρ. Entsprechendes gilt für die anderen Winkelfunktionen. Bei den Arkusfunktionen ist es umgekehrt: Die Ableitung von arcsin(x) ist* $1/\sqrt{1-x^2}$*, aber nur als Funktion, die Bogenmaß als Einheit des Ergebnisses liefert. Soll automatisch in Gon umgerechnet werden, ist noch der Faktor ρ erforderlich, so dass die Ableitung* $\rho/\sqrt{1-x^2}$ *lautet! Bei den anderen Arkusfunktionen ist das genauso. Bei Grad als Winkeleinheit ist ρ=180°/π zu setzen.*

Aufgaben mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz löst man in folgenden Schritten:

1. Sicherstellen, dass die Eingangsgrößen unkorreliert sind
2. Aufstellen der Funktion $f$, auf die das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet werden soll. Die Argumente von $f$ sind die $n$ Eingangsgrößen $L_1, L_2, \dots, L_n$ und der Funktionswert von $f$ ist die Ergebnisgröße $X$.
3. Bilden der partiellen Ableitungen $\partial f / \partial L_i$, notfalls mit Näherungswerten, sollten die eigentlichen Werte für die Eingangsgrößen noch nicht vorliegen
4. Einsetzen aller bekannten Größen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz
5. Umstellen der Gleichung nach der unbekannten Größe, falls das nicht $\sigma_X$ ist

## 2.2 SONDERFÄLLE DER FEHLERFORTPFLANZUNG

In einigen häufig auftretenden Sonderfällen kann man das Fehlerfortpflanzungsgesetz bedeutend vereinfachen. Wir stellen die drei wichtigsten dar:

**Sonderfall Summe oder Differenz:**

$$X = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n$$

In diesen Fällen ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 = 1$$

und man erhält

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}$$

Bei gleichen Standardabweichungen $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = \sigma$ aller Eingangsgrößen erhält man die noch einfachere Formel

$$\sigma_X = \sqrt{n}\,\sigma$$

**Beispiel 2** (Fortsetzung): Bei einem Liniennivellement traten zufällige Messabweichungen der Lattenablesung mit einer Standardabweichung von σ = 0,2 mm auf. Bei $k$ Stationsaufstellungen erhält man für den Gesamthöhenunterschied $\Delta h$ die Standardabweichung

$$\sigma_{\Delta h} = \sqrt{2k}\,\sigma = \sqrt{2k} \cdot 0{,}2\ \text{mm}$$

Dieses Beispiel vermittelt folgende Erkenntnis: Während maximale und systematische Messabweichungen proportional zu $k$ und wegen etwa gleich langer Zielweiten $ZW$ proportional zur Linienlänge $R=2\cdot k\cdot ZW$ des Nivellements anwachsen, erhöhen sich Standardabweichungen langsamer, nämlich nur proportional zu $\sqrt{k}$ bzw. $\sqrt{R}$. Dies ist der Wirkung des Zufalls zu verdanken. Wir nennen dieses Gesetz das **Wurzelgesetz des Nivellements** („~" bedeutet proportional):

$$\sigma_{\Delta h} \sim \sqrt{R}$$

**Sonderfall Mittelwert**:

$$X = \frac{1}{n}(L_1 + L_2 + \cdots + L_n)$$

In diesem Fall erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial L_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial L_n} = \frac{1}{n}$$

und somit

$$\sigma_X = \frac{1}{n}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2}$$

Bei gleichen Standardabweichungen $\sigma_1 = \cdots = \sigma_n = \sigma$ aller Eingangsgrößen erhält man die noch einfachere Formel

$$\sigma_X = \frac{1}{n}\sqrt{n\sigma^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Beispiel 4**: Bei der satzweisen Richtungsmessung wird in jedem Satz eine Standardabweichung von 0,6 mgon erreicht. In drei Sätzen beträgt die Standardabweichung des Satzmittels 0,6 mgon/$\sqrt{3}$ = 0,35 mgon.

**Sonderfall Produkt:**

$$X = L_1 \cdot L_2$$

In diesem Fall erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial L_1} = L_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial L_2} = L_1$$

und somit

$$\sigma_X = \sqrt{L_2^2 \cdot \sigma_1^2 + L_1^2 \cdot \sigma_2^2}$$

**Aufgabe 2**: Von einem rechteckigen Flächenstück mit den Seitenlängen 20 m und 30 m soll der Inhalt bestimmt werden. Dazu werden die kurze Seite mit einer Standardabweichung von 3 mm und die lange mit einer Standardabweichung von 5 mm gemessen. Berechnen Sie die Standardabweichung des zu erhaltenden Flächeninhalts.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?ffg-aufgabe02

## 2.3 BERECHNUNG DER RESULTIERENDEN GENAUIGKEIT VON ERGEBNISGRÖßEN

Im folgenden Beispiel muss die Ableitung einer Winkelfunktion gebildet werden, so dass der Hinweis aus Abschnitt 2.1 zu beachten ist.

**Beispiel 5**: In einem Dreieck werden zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gemessen. Dabei werden erhalten:

$$a = 14{,}02 \text{ m},\ b = 23{,}06 \text{ m},\ \gamma = 47{,}553 \text{ gon}$$

Die Standardabweichungen der Seiten werden a priori mit $\sigma_a = \sigma_b$ =0,03 m angenommen und die des Winkels mit $\sigma_\gamma$ = 0,005 gon. Wir bestimmen die Standardabweichung der zu berechnenden Seite *c*.

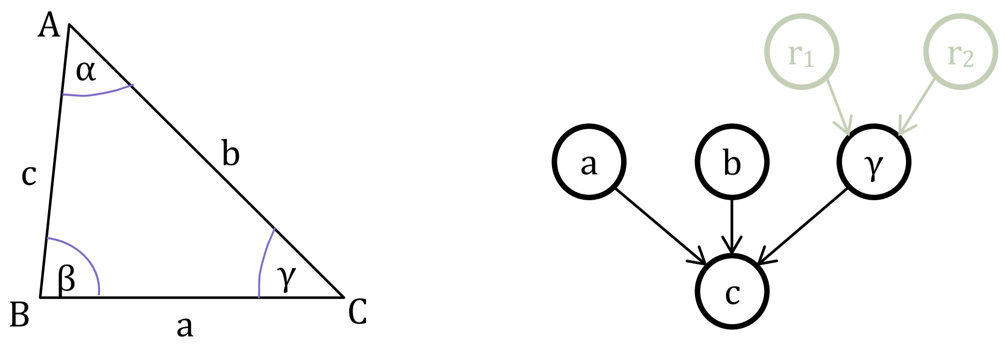



**Abbildung 4:** Messungsanordnung und Stammbaum zu Beispiel 5

**Lösung**: Die Nummerierung der Schritte entspricht Abschnitt 2.1.

1. Möglicherweise ist $\gamma$ kein ursprünglicher Messwert, sondern aus gemessenen Richtungen $r_1$, $r_2$ berechnet. $a,b,\gamma$ sind dennoch unkorrelierte Größen (↗ Stammbaum in Abbildung 4).
2. Die Ergebnisgröße $c$ berechnet man aus $a,b,\gamma$ mit der Funktion
$$c = f(a,b,\gamma) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$
3. Die partiellen Ableitungen sind
$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{a - b\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} = \frac{-2{,}900}{15{,}902} = -0{,}1824$$
$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{b - a\cos\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} = \frac{12{,}77}{15{,}902} = 0{,}8032$$
$$\frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{3{,}450}{15{,}902} = 0{,}2170$$
4. Einsetzen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt
$$\sigma_c = \sqrt{(-0{,}1824)^2 \cdot 0{,}03^2 + 0{,}8032^2 \cdot 0{,}03^2 + 0{,}2170^2 \cdot 0{,}005^2} = \underline{0{,}025\text{mm}}$$
5. Die zu bestimmende Größe ist $\sigma_c$, so dass nicht umgestellt werden muss.

Beachten Sie, dass in diesem Beispiel die Seite $c$ sogar genauer erhalten wird, als die Seiten $a$ und $b$ gemessen wurden.

**Aufgabe 3**: Berechnen Sie mit den Werten aus Beispiel 5 die Standardabweichung des sich ergebenden Dreiecksflächeninhalts.

Im folgenden Beispiel müssen Ableitungen von Winkelfunktion gebildet werden, so dass der Hinweis aus Abschnitt 2.1 zu beachten ist.

**Beispiel 6:** Gegeben sind folgende Tachymetermesswerte:

| Standpkt | Zielpkt | Hz-Richtung | Hz-Strecke |
|---|---|---|---|
| A | B | 0,0000 gon | 225,084 m |
| A | N | 56,7670 gon | --- |
| B | A | 0,0000 gon | --- |
| B | N | 287,5466 gon | --- |

Die Messungen besitzen folgende Standardabweichungen: Richtungen auf Standpunkt A: 0,8 mgon; auf Standpunkt B: 1,5 mgon; Strecke AB: 1,5 mm. Wir bestimmen die Standardabweichungen der Koordinaten von N bezüglich einer lokalen Koordinatenbasis AB.

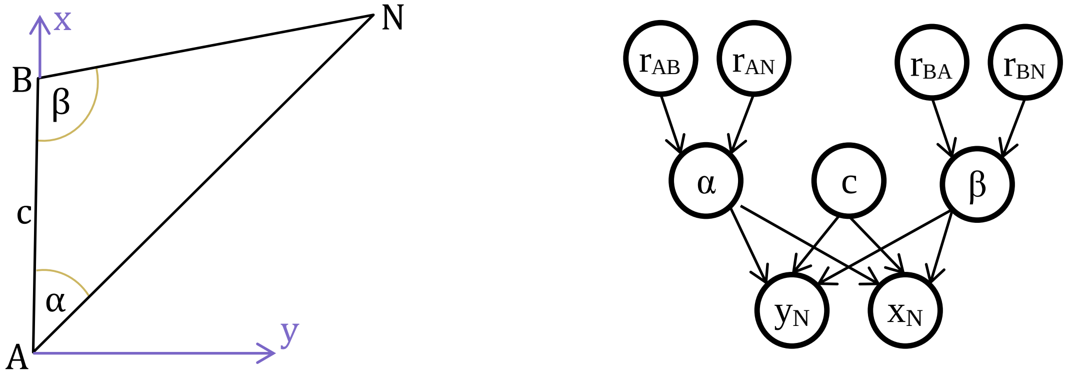



**Abbildung 5:** Messungsanordnung und Stammbaum zu Beispiel 6

**Lösung**: Grundlage dieser Berechnung ist der ebene Vorwärtsschnitt mit Gegensicht.

Als Eingangsgrößen der Fehlerfortpflanzung können die Winkel $\alpha$=56,7670 gon, $\beta$=112,4534 gon und die Basis $c$=225,084 m angesehen werden. Jedoch sind α und β nicht ursprünglich gemessen, sondern ergeben sich aus den Differenzen der Richtungen $r_{AB}$, $r_{AN}$, $r_{BA}$, $r_{BN}$. Mit dem Sonderfall Differenz aus dem vorigen Abschnitt für $n$=2 erhalten wir zunächst $\sigma_\alpha = \sqrt{2} \cdot 0{,}8$ mgon = 1,13 mgon und $\sigma_\beta = \sqrt{2} \cdot 1{,}5$ mgon = 2,12 mgon.

Die Nummerierung der weiteren Schritte entspricht Abschnitt 2.1.

1. $\alpha,\beta,c$ sind unkorrelierte Größen, insbesondere ohne mathematische Korrelationen (↗ Stammbaum in Abbildung 5).
2. Die Ergebnisgrößen $x_N$ und $y_N$ berechnet man aus $\alpha,\beta,c$ mit den Funktionen

$$y_N = f_y(\alpha,\beta,c) = c\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin(\alpha)$$

$$x_N = f_x(\alpha,\beta,c) = c\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\alpha)$$

3. Die partiellen Ableitungen werden mit den Quotientenregeln gebildet, z.B.
$$\frac{\partial f_x}{\partial \alpha} = c \sin\beta \frac{-\sin(\alpha)\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha)\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)} \cdot \frac{1}{\rho} = -15{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{gon}}$$
4. Einsetzen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt
$$\sigma_{y_N} = \sqrt{(3{,}12)^2 \cdot 1{,}13^2 + (8{,}00)^2 \cdot 2{,}12^2 + (1{,}33)^2 \cdot 1{,}5^2}\,\mathrm{mm} = \underline{17{,}4\ \mathrm{mm}}$$
$$\sigma_{x_N} = \sqrt{(-15{,}8)^2 \cdot 1{,}13^2 + (-9{,}91)^2 \cdot 2{,}12^2 + (-1{,}64)^2 \cdot 1{,}5^2}\,\mathrm{mm} = \underline{27{,}7\ \mathrm{mm}}$$
5. Die zu bestimmenden Größen waren $\sigma_{y_N}$ und $\sigma_{x_N}$, so dass nicht umgestellt werden muss.

**Aufgabe 4**: Wenn im Beispiel 6 der Neupunkt nicht durch Richtungsmessung, sondern durch Messung der Horizontalstrecken AN und BN mit einer Standardabweichung von je 1,5 mm bestimmt worden wäre, wie groß ergäben sich dann die Standardabweichungen der Neupunktkoordinaten? (Beachten Sie: Im Unterschied zur Berechnung von $y_N, x_N$ ist die Berechnung von $\sigma_{y_N}, \sigma_{x_N}$ eindeutig.)

**Aufgabe 5**: Die Gruppenrefraktivität $N_L$ (auch Gruppenbrechungsindex genannt) der Atmosphäre zur Korrektur elektronischer Distanzmessungen (EDM) ergibt sich aus der Formel

$$N_L = \frac{273{,}15}{1013{,}25} \cdot \frac{N_{gr} \cdot p}{273{,}15 + t} - \frac{11{,}27 \cdot e}{273{,}15 + t}$$

Berechnen Sie die Standardabweichung von $N_L$ aus den gegebenen Werten und Standardabweichungen

- der Lufttemperatur $t$ = -10 °C mit $\sigma_t$ = 5 K
- des Luftdrucks von $p$=990 hPa mit $\sigma_p$ = 5 hPa und
- des Partialdrucks des Wasserdampfes von $e$ = 50 hPa mit $\sigma_e$ = 20 hPa.

(Die Zahlenwerte von $t, p, e$ müssen in diesen Einheiten eingesetzt werden. Als Einheit der Temperaturdifferenz und damit auch der Standardabweichung wird in der Norm DIN 1345 das Kelvin [K] vorgeschrieben.) Die Gruppenrefraktivität der Standardatmosphäre $N_{gr}$ = 299,2646 ist fehlerfrei bekannt. Berechnen Sie danach die Standardabweichung einer zu korrigierenden Strecke $s'$=236,142 m mit der Standardabweichung $\sigma_{s'}$ = 3 mm. Die Korrektionsformel lautet

$$s = s' \cdot \left(1 + \frac{N_0 - N_L}{10^6 + N_L}\right)$$

Die Gruppenrefraktivität der Normalatmosphäre ist für dieses EDM mit $N_0$ = 290,0000 fehlerfrei bekannt.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?ffg-aufgabe05

## 2.4 BERECHNUNG DER ERFORDERLICHEN GENAUIGKEIT VON MESSWERTEN

Mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ist es umgekehrt möglich, zu berechnen, wie genau Messgrößen mindestens gemessen werden müssen, um sicherzustellen, dass aus diesen Messwerten berechnete Ergebnisse eine geforderte Genauigkeit erreichen. Hierfür wird auch der Begriff “Genauigkeitsvorbetrachtung” verwendet. Dazu muss das Fehlerfortpflanzungsgesetz nach der Standardabweichung des Messwerts umgestellt werden.

⚠ *Es ist nicht zulässig, die Funktion f zu ändern. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz muss immer noch auf dieselbe Funktion f angewendet werden!*

**Beispiel 7**: Von einem bekannten Standpunkt S mit Koordinatenstandardabweichungen $\sigma_{Y_S} = \sigma_{X_S} = 5$ mm wird in der Horizontalebene ein Polarpunkt P gemessen. Die Distanzmessung $e \approx 200$ m hat eine Standardabweichung von 3 mm. Die Lagestandardabweichung von P, definiert als

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_{Y_P}^2 + \sigma_{X_P}^2}$$

soll 10 mm nicht überschreiten. Wie genau muss der Richtungswinkel $t$ bestimmt werden?

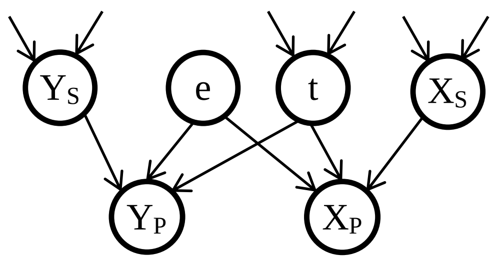



**Abbildung 6:** Stammbaum zu Beispiel 7

**Lösung**: Die Nummerierung der Schritte entspricht Abschnitt 2.1.

1. $e$ und $t$ sind als unkorreliert zu betrachten. Schwieriger ist es mit $X_S$ und $Y_S$. Hier könnten bei der Punktbestimmung mathematische Korrelationen entstanden sein. Diese sind unbekannt und müssen deshalb vernachlässigt werden.
2. Die Ergebnisgrößen $Y_P$ und $X_P$ berechnet man aus $e$, $t$, $Y_S$ und $X_S$ mit den Funktionen
$$Y_P = f_Y(Y_S, e, t) = Y_S + e \cdot \sin t$$
$$X_P = f_X(X_S, e, t) = X_S + e \cdot \cos t$$
3. Die partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial f_Y}{\partial Y_S} = \frac{\partial f_X}{\partial X_S} = 1 \qquad \frac{\partial f_Y}{\partial e} = \sin t \quad \frac{\partial f_X}{\partial e} = \cos t \quad \frac{\partial f_Y}{\partial t} = \frac{e \cdot \cos t}{\rho} \quad \frac{\partial f_X}{\partial t} = -\frac{e \cdot \sin t}{\rho}$$

4. Einsetzen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{Y_P}^2 = \sigma_{Y_S}^2 + \sin^2 t \cdot \sigma_e^2 + \left(\frac{e \cdot \cos t}{\rho}\right)^2 \cdot \sigma_t^2$$
$$\sigma_{X_P}^2 = \sigma_{X_S}^2 + \cos^2 t \cdot \sigma_e^2 + \left(\frac{e \cdot \sin t}{\rho}\right)^2 \cdot \sigma_t^2$$

   und zusammenfassen, wobei das bekannte mathematische Gesetz $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ benutzt wird, ergibt

$$\sigma_P^2 = \sigma_{Y_S}^2 + \sigma_{X_S}^2 + \sigma_e^2 + \frac{e^2}{\rho^2} \cdot \sigma_t^2 = 2 \cdot 25\ \text{mm}^2 + 9\ \text{mm}^2 + \frac{40000\ \text{m}^2}{4053\ \text{gon}^2} \cdot \sigma_t^2$$
$$\leq 100\ \text{mm}^2$$

5. Die zu bestimmende Größe ist $\sigma_t$, nach der umgestellt werden muss:

$$\sigma_t^2 \leq \frac{4053\ \text{gon}^2}{40000\ \text{m}^2} \cdot 41\ \text{mm}^2 = 4{,}15\ \text{mgon}^2$$
$$\underline{\sigma_t \leq 2{,}0\ \text{mgon}}$$

Der Richtungswinkel *t* muss mit einer Standardabweichung von 2,0 mgon oder besser bestimmt werden.

**Aufgabe 6**: Von einem rechteckigen Flächenstück mit den Seitenlängen 20 m und 30 m soll der Inhalt *F* bestimmt werden. Dazu werden die beiden Seiten mit derselben Standardabweichung gemessen. Berechnen Sie die Standardabweichung, die erforderlich ist, um $\sigma_F \leq 1\ \text{m}^2$ sicherzustellen.

**Beispiel 8**: Die Streckenreduktion im UTM-Koordinatensystem lautet

$$\Delta e = e \cdot \left(\frac{Y^2}{2R^2} - \frac{H}{R} - 400\ \text{ppm}\right)$$

und soll im Westerzgebirge (Ostwert $Y \approx$ -150 km, Erdradius $R \approx$ 6390 km) mit einer Standardabweichung von $\sigma_{\Delta e} \leq 1$ mm für Strecken bis maximal 500 m berechnet werden. Die Eingabegrößen sind mit folgenden Standardabweichungen gegeben:

$\sigma_e = 3$ mm, $\sigma_Y = 500$ m, $\sigma_R = 5$ km

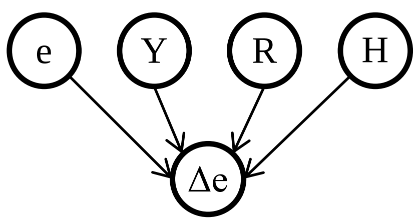



**Abbildung 7:** Stammbaum zu Beispiel 8

Wie genau muss die Höhe $H$ über dem Bezugshorizont gegeben sein?

**Lösung**: Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet auf die Berechnung der UTM-Streckenreduktion lautet

$$\sigma_{\Delta e}^2 = \left(\frac{Y^2}{2R^2} - \frac{H}{R} - 400\text{ ppm}\right)^2 \sigma_e^2 + \left(\frac{e \cdot Y}{R^2}\right)^2 \sigma_Y^2 + e^2 \left(\frac{H}{R^2} - \frac{Y^2}{R^3}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(-\frac{e}{R}\right)^2 \sigma_H^2$$

Man erkennt in dieser Formel, dass längere Strecken weniger genau korrigiert werden, als kurze. Um $\sigma_{\Delta e} \leq 1$ mm bis 500 m sicherzustellen, gehen wir vom ungünstigten Fall $e$ = 500 m aus. Einsetzen aller gegebenen Werte ergibt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta e}^2 &= (-3{,}73 \cdot 10^{-7}\text{m} - H \cdot 4{,}69 \cdot 10^{-10})^2 + 8{,}43 \cdot 10^{-7}\text{m}^2 \\ &\quad + (H \cdot 6{,}12 \cdot 10^{-8} - 2{,}16 \cdot 10^{-4}\text{m})^2 + 6{,}12 \cdot 10^{-9}\sigma_H^2 \leq 10^{-6}\end{aligned}$$

Die gesuchte Größe ist $\sigma_H$ , also stellen wir danach um:

$$\sigma_H = \sqrt{17{,}98\text{ m}^2 + H \cdot 4{,}31 \cdot 10^{-10}\text{m} - H^2 \cdot 6{,}12 \cdot 10^{-7}} \approx \underline{4{,}5\text{ m} \cdots 5\text{ m}}$$

Man erkennt, dass für die im Westerzgebirge vorzufindenden Höhen H=400 m … 1200 m die Standardabweichung $\sigma_H$ im Bereich von 4,5 m … 5 m liegen muss. Also ist eine entsprechende “Meter-Genauigkeit” für $H$ mehr als ausreichend.

**Aufgabe 7**: Zwischen zwei Punkte A und E im Abstand von ca. 90 m wird etwa in der Mitte ein Zwischenpunkt P nach Augenmaß eingefluchtet. Der horizontale Abstand von P zur Geraden AE (Fluchtungsabweichung) soll kleiner als 0,1 m sein. Zur Kontrolle soll die Fluchtungsabweichung durch Tachymetermessung auf P mit einer Standardabweichung von höchstens 0,5 mm bestimmt werden. Dazu sollen die Horizontalstrecken PA und PE mit einer Standardabweichung von 2 mm und die Horizontalrichtungen PA und PE mit einer Standardabweichung von 1 mgon je Vollsatz gemessen werden. Wieviele Vollsätze müssen auf P gemessen werden?

## 2.5 OPTIMIERUNG VON MESSUNGSANORDNUNGEN

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz kann genutzt werden, um zwischen mehreren Varianten einer Messung die günstigste auszuwählen.

**Beispiel 9**: Der Radius eines Kreisbogens durch 3 im Gelände vermarkte Punkte A,B,C soll bestimmt werden. Dazu ist es ausreichend, einen Winkel und die gegenüberliegende Seite des Dreiecks ABC zu messen, wobei wir Standardabweichungen von 5 mgon und 10 mm erreichen. Wir kennen näherungsweise folgende Abmessungen dieses Dreiecks (↗Abbildung 8):

$a$ = 17 m, $b$ = 23 m, $c$ = 14 m, $\alpha$ = 53 gon, $\beta$ = 106 gon, $\gamma$ = 41 gon

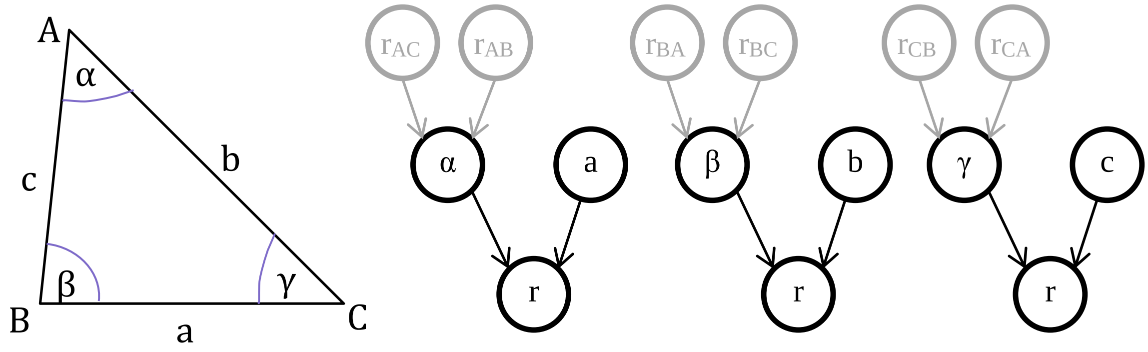



**Abbildung 8:** zu Beispiel 9

Gesucht ist die am günstigsten zu messende Winkel-Seiten-Kombination.

**Lösung**: Die Nummerierung der Schritte entspricht Abschnitt 2.1.

1. Seitenlängen sind ursprüngliche Messwerte und Winkel auf jeweils verschiedenen Standpunkten sind ebenso unkorrelierte Größen (↗Abbildung 8, Stammbaum).
2. Die Ergebnisgröße $r$ berechnet man aus Seite und gegenüberliegendem Winkel mit einer der Funktionen
$$r = f_1(a, \alpha) = \frac{a}{2\sin\alpha}$$
$$r = f_2(b, \beta) = \frac{b}{2\sin\beta}$$
$$r = f_3(c, \gamma) = \frac{c}{2\sin\gamma}$$
Diese Formeln basieren auf der Umkreisberechnung im Dreieck ABC und können jeder einschlägigen Formelsammlung entnommen werden.
3. Die partiellen Ableitungen lauten
$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = -\frac{a \cdot \cos\alpha}{2\rho\sin^2\alpha}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial b} = \frac{1}{2\sin\beta}, \quad \cdots \quad \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} = -\frac{c \cdot \cos\gamma}{2\rho\sin^2\gamma}$$
4. Einsetzen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz mit $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = 5$ mgon und $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = 10$ mm ergibt für $\sigma_r$ in den drei Varianten die Werte 6,8 mm oder 5,0 mm oder 8,4 mm.
5. Die zu bestimmende Größe ist $\sigma_r$, so dass das Fehlerfortpflanzungsgesetz nicht umgestellt werden muss. Der günstigste Wert $\underline{\sigma_r = 5{,}0\text{ mm}}$ wird für die Eingangsgrößen $b$ und $\beta$ erhalten. Also sollten diese Größen gemessen werden.

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?ffg-beispiel09 Nur Kombination $a, \alpha$ ist hier vorbereitet, die anderen entsprechen dem Muster.

**Aufgabe 8**: Überprüfen Sie, ob im Fall von Aufgabe 6 die Messung einer Diagonale statt einer der beiden Seiten günstiger wäre. Alle Messungen erfolgen wie bisher mit derselben Standardabweichung.

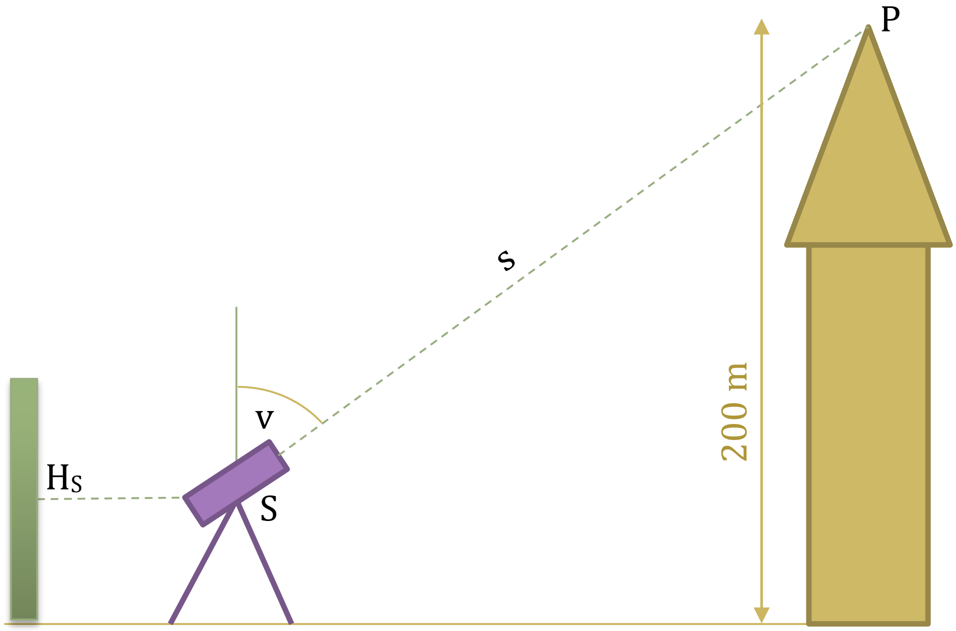



**Abbildung 9**: Trigonometrische Turmhöhenbestimmung (Beispiel 10)

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz kann außerdem genutzt werden, um bestimmte Parameter von Messungsanordnungen zu optimieren.

**Beispiel 10**: Die Höhe einer ca. 200 m hohen Turmspitze P soll trigonometrisch bestimmt werden (↗Abbildung 9). Der hierfür optimale Standpunkt S ist gesucht. Die Messung des Zenitwinkels *v* erfolgt mit einer Standardweichung von 1 mgon und die Schrägstrecke *s* wird mit einer Standardweichung von 5 mm gemessen. Die Standardweichung der Anschlusshöhe $H_S$ gilt als unbekannt.

**Lösung**: Die Nummerierung der Schritte entspricht Abschnitt 2.1.

1. Zenitwinkel *v*, Schrägstrecke *s* und Anschlusshöhe $H_S$ sind ursprüngliche Messwerte, also ist von Unkorreliertheit auszugehen.
2. Die Ergebnisgröße $H_P$ berechnet man aus
$$H_P = f(H_S, s, v) = H_S + s \cdot \cos v$$
3. Die partiellen Ableitungen lauten
$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{s \cdot \sin v}{\rho}, \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \cos v, \quad \frac{\partial f}{\partial H_S} = 1$$
4. Einsetzen in das Fehlerfortpflanzungsgesetz ergibt
$$\sigma_{H_P}^2 = \left(\frac{s \cdot \sin v}{\rho}\right)^2 \cdot \sigma_v^2 + \cos^2 v \cdot \sigma_s^2 + \sigma_{H_S}^2$$
5. Da sowohl s als auch *v* von der Wahl des Standpunktes abhängen, ist es am besten, eine Unbekannte zu eliminieren: $s = (H_P - H_S)/\cos v$
$$\sigma_{H_P}^2 = \left((H_P - H_S)\frac{\tan v}{\rho}\right)^2 \cdot \sigma_v^2 + \cos^2 v \cdot \sigma_s^2 + \sigma_{H_S}^2$$

$$\sigma_{H_P}^2 - \sigma_{H_S}^2 = \tan^2 v \cdot 9{,}9\ \mathrm{mm}^2 + \cos^2 v \cdot 25\ \mathrm{mm}^2$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung soll durch geschickte Wahl des Standpunktes und damit von *v* möglichst klein gemacht werden, um eine optimale Genauigkeit für die Turmhöhe zu erreichen. Wir demonstrieren für diese Optimierungsaufgabe eine graphische Lösung: Für verschiedene Zenitwinkels *v* ist die rechte Seite in Abbildung 10 aufgetragen. Man erkennt deutlich, dass das Optimum bei etwa *v* = 62 gon liegt.

Daraus folgt, dass der horizontale Abstand des Standpunktes S vom Turm P etwa tan(62)·200 m ≈ 300 m betragen müsste. Die Standardweichung der Anschlusshöhe $H_S$ ist hierfür irrelevant.

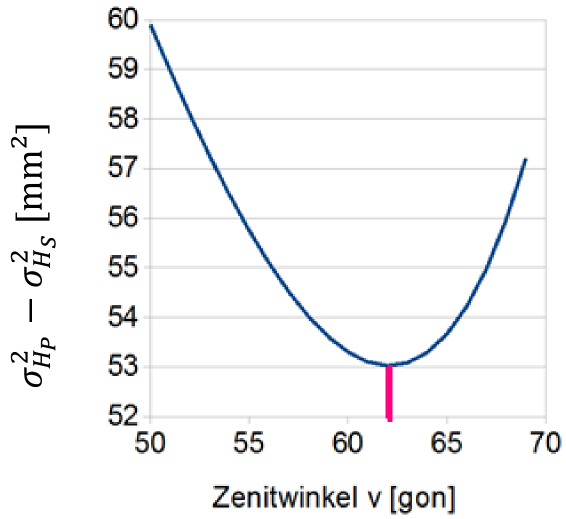



**Abbildung 10**: Graphische Lösung der Optimierungsaufgabe aus Beispiel 10

**Aufgabe 9**: Möglicherweise ist die Genauigkeit des Zenitwinkels *v* in Beispiel 10 praktisch stark vom Zenitwinkel abhängig, weil steile Zielungen schwierig zu messen sind und deshalb ungenauer erhalten werden. Überlegen Sie, wie eine Erweiterung der Berechnung aussehen müsste, die das berücksichtigt.

**Aufgabe 10**: In Beispiel 6 wäre die Lagestandardabweichung von N mit

$$\sigma_N = \sqrt{\sigma_{Y_N}^2 + \sigma_{X_N}^2} = 32{,}7\ \mathrm{mm}$$

erhalten worden. Nun soll versucht werden, die Genauigkeit zu steigern, indem statt von B die Messungen von einem anderen Punkt B' aus, der auf derselben Basisgerade AB liegt, vorgenommen werden. Auf B' wird dieselbe Richtungsmessgenauigkeit wie auf B angenommen. Für welchen Punkt B' ergibt sich die kleinste Lagestandardabweichung $\sigma_N'$ und wie groß ist diese?

**Hinweis**: AN ändert sich nicht. Berechnen Sie *β*' in Abhängigkeit von *c*'=AB' und daraus $\sigma_N'$. Optimieren Sie nun!

# 3 FEHLERFORTPFLANZUNG - NUMERISCHE METHODE

Die numerische Methode der Fehlerfortpflanzung, auch als Methode der „Veränderung der Messwerte“ bezeichnet, eignet sich in folgenden drei Fällen:

1. Die Funktion $f$ ist sehr kompliziert strukturiert, so dass das manuelle analytische Differenzieren aufwändig ist, und Computeralgebrasysteme stehen nicht zur Verfügung oder sind unhandlich zu benutzen.
2. Die Funktion $f$ liegt gar nicht formelmäßig vor, sondern ist nur als Softwarebaustein mit unzugänglichem Quellcode realisiert.
3. Die Abweichungen sind nicht alles „kleine Größen“, z.B. grobe Messabweichungen. (Diesen Punkt vertiefen wir hier nicht.)

Es kann also nicht analytisch differenziert werden. Statt dessen werden die partiellen Ableitungen numerisch gebildet, also werden Differenzialquotienten durch **Differenzenquotienten** angenähert.

$$\frac{\partial f}{\partial L_i} \approx \frac{\Delta f}{\Delta L_i} = \frac{f(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i + \Delta L_i, L_{i+1}, \dots, L_n) - f(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_n)}{\Delta L_i}$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Numerische_Differentiation

Am einfachsten ist es, wenn man $\Delta L_i \coloneqq \sigma_i$ wählt, dann erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial L_i}\sigma_i \approx f(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i + \sigma_i, L_{i+1}, \dots, L_n) - f(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_n) = \Delta_i$$

so dass sich das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz wie folgt schreiben lässt:

$$\sigma_X = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}$$

Die praktische Rechnung kann in folgende Schritte zerlegt werden:

1. Sicherstellen, dass die Eingangsgrößen unkorreliert sind.
2. Berechnung von $X = f(L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_n)$ mit den gegebenen Eingangsgrößen oder Näherungswerten davon, wenn die eigentlichen Werte noch nicht vorliegen.
3. Änderung der ersten Eingangsgröße $L_1$ in $L_1 + \sigma_1$ und erneute Berechnung von $X$.
4. Änderung jeder weiteren Eingangsgröße $L_i$ in $L_i + \sigma_i$, wobei vorher die Änderung des vorangegangenen Schritts **rückgängig** gemacht werden muss, und erneute Berechnung von $X$. (Es darf in jeder Berechnung nur **eine** Eingangsgröße geändert sein.)
5. Nun liegen $n$+1 Werte für X vor. Jetzt werden alle $n$ Differenzen $\Delta_i$ zum ersten Wert gebildet. Die Vorzeichen von $\Delta_i$ spielen keine Rolle.

6. $\sigma_X$ wird nach der oben angegebenen Formel berechnet.

**Beispiel 6** (zweite Variante): Obwohl in diesem Beispiel die analytische Methode durchaus anwendbar war, stellen wir zum Vergleich die numerische Methode dagegen. Die Nummerierung der Schritte folgt dem vorangegangenen Schema.

1. Dieser Schritt ändert sich nicht im Vergleich zu Abschnitt 2.3.
2. Zuerst ist ein Vorwärtsschnitt mit Gegensicht mit den unveränderten Eingangsgrößen zu berechnen. Das Ergebnis ist $y_N$ = 369,5801; $x_N$ = 298,3169.
3. Nun wird die Eingangsgröße α um $\sqrt{2}\cdot$0,8 mgon vergrößert und die Berechnung wiederholt. Das Ergebnis ist $y_N$ = 369,5979; $x_N$ = 298,3204.
4. Nun wird die Eingangsgröße β um $\sqrt{2}\cdot$1,5 mgon, danach die Eingangsgröße c um 1,5 mm vergrößert, wobei zuvor die Änderungen der letzten Rechnung rückgängig gemacht wurden. Die Berechnungen des Vorwärtsschnitts werden jeweils wiederholt.
5. Für jede Koordinate werden drei Differenzen gebildet: $\Delta_{y\alpha}, \Delta_{y\beta}, \Delta_{yc}, \Delta_{x\alpha}, \Delta_{x\beta}, \Delta_{xc}$:

| Änderung | $y_N$ [m] | $x_N$ [m] | $\Delta_y$ [mm] | $\Delta_x$ [mm] |
|---|---|---|---|---|
| ohne | 369,5801 | 298,3169 | | |
| α um $\sqrt{2}\cdot$0,8 mgon | 369,5979 | 298,3204 | 17,8 | 3,5 |
| β um $\sqrt{2}\cdot$1,5 mgon | 369,6011 | 298,3338 | 21,0 | 16,9 |
| c um 1,5 mm | 369,5826 | 298,3188 | 2,5 | 1,9 |

6. Man berechnet schließlich

$$\sigma_{y_N} = \sqrt{\Delta_{y\alpha}^2 + \Delta_{y\beta}^2 + \Delta_{yc}^2} = \sqrt{17{,}8^2 + 21{,}0^2 + 2{,}5^2}\ \text{mm} = \underline{27{,}6\ \text{mm}}$$

$$\sigma_{x_N} = \sqrt{\Delta_{x\alpha}^2 + \Delta_{x\beta}^2 + \Delta_{xc}^2} = \sqrt{3{,}5^2 + 16{,}9^2 + 1{,}9^2}\ \text{mm} = \underline{17{,}4\ \text{mm}}$$

☝ http://www.in-dubio-pro-geo.de/load.php?ffg-beispiel06

Die Optimierung von Messungsanordnungen ist mit der numerischen Methode nur möglich, wenn mehrere Varianten verglichen werden sollen:

**Beispiel 9** (zweite Variante): Man berechnet

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = 11{,}4922\ \text{m}$$

$$\Delta_a = \frac{a + 10\ \text{mm}}{2\sin\alpha} - r = 6{,}8\ \text{mm}$$

$$\Delta_\alpha = \frac{a}{2\sin(\alpha + 5\text{ mgon})} - r = -0{,}8\text{ mm}$$

$$\sigma_r = \sqrt{6{,}8^2 + 0{,}8^2}\text{ mm} = 6{,}8\text{ mm}$$

und dasselbe für die beiden anderen Kombinationen. Die Variante mit dem günstigsten Wert wird gewählt.

*Normalerweise kann man die Fehlerfortpflanzung mit Näherungswerten berechnen. In Beispiel 9 wurde das gemacht. Bei der numerischen Methode ist allerdings an einer Stelle Vorsicht geboten: Für die Kombination* b, β *kann man nicht auf r=11,4922 m zurück greifen, sondern müsste r neu berechnen mit 23 m und 106 gon, dann nochmals für die Kombination* c, γ. *Oder man müsste mit Winkeln rechnen, die exakt zu dem Dreieck mit den Seiten 17 m, 23 m, 14 m passen, das sind: 52,654 gon, 105,893 gon, 41,452 gon.*

Die Optimierung von Messungsanordnungen wie in Beispiel 10 ist mit der numerischen Methode nicht möglich. Zur Berechnung der erforderlichen Genauigkeit von Messwerten eignet sich die numerische Methode schlecht. Ihre Anwendung wird daher nicht empfohlen.

**Aufgabe 11**: Von zwei Festpunkten A und B aus soll ein Neupunkt N als Polarpunkt gemessen werden. Die Koordinaten von A und B und die Näherungskoordinaten von N sind

| Punkt | x [m] | y [m] |
|---|---|---|
| A | 161,063 | 140,291 |
| B | 171,165 | 230,697 |
| N | 200 | 240 |

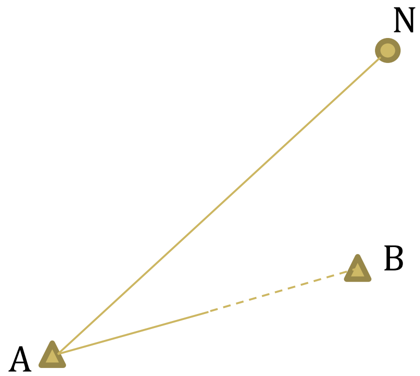
Die Standardabweichung der Richtungsmessungen beträgt 1 mgon und der Distanzmessung 5 mm. Die Koordinaten von A und B haben Standardabweichungen von je 10 mm.

Bestimmen Sie die resultierende Lagestandardabweichung von N bei Messung

a) von Standpunkt A mit Anschlusspunkt B (Abbildung 11),
b) von Standpunkt B mit Anschlusspunkt A und
c) beider Varianten und Bildung des arithmetischen Mittels aus beiden Koordinatenlösungen

**Hinweis**: Es müssen insgesamt 16 Polarpunktberechnungen vorgenommen werden. Hierfür ist IN DUBIO PRO GEO ein ideales Werkzeug. Beachten Sie auch

http://www.in-dubio-pro-geo.de/index.php?file=guide/errprop#unic



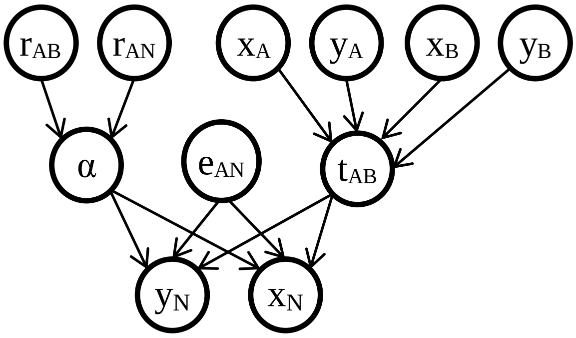




**Abbildung 11:** zu Aufgabe 11

# 4 GEWICHTSFORTPFLANZUNG

Im Unterschied zur Fehlerfortpflanzung arbeitet die Gewichtsfortpflanzung nur mit **relativen** Genauigkeitsmaßen, die durch Gewichte verkörpert werden.

**Beispiel 11**: Die Strecke AB in Abbildung 12 wird indirekt durch Messung der Strecken AP und PB bestimmt und ein zweites Mal durch Messung der Strecken AQ und QB. Die rechten Winkel bei P und Q gelten als fehlerfrei bestimmt, alle gemessenen Strecken als gleich genau. Wir bestimmen die Gewichte, die den beiden Lösungen für AB zuzuordnen sind.

**Lösung**: Das Gewichtsfortpflanzungsgesetz ist jeweils anzuwenden auf die Funktionen

$$AB = \sqrt{AP^2 + PB^2} \quad \text{und} \quad AB = \sqrt{AQ^2 + QB^2}$$

Die Ableitungen sind

$$\frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PB^2}} = \frac{AP}{AB}, \frac{PB}{\sqrt{AP^2 + PB^2}} = \frac{PB}{AB}, \frac{AQ}{\sqrt{AQ^2 + QB^2}} = \frac{AQ}{AB}, \frac{QB}{\sqrt{AQ^2 + QB^2}} = \frac{QB}{AB}$$

Einsetzen in das Gewichtsfortpflanzungsgesetz ergibt

$$\frac{1}{p_{AB(P)}} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 \frac{1}{p_{AP}} + \left(\frac{PB}{AB}\right)^2 \frac{1}{p_{PB}}$$

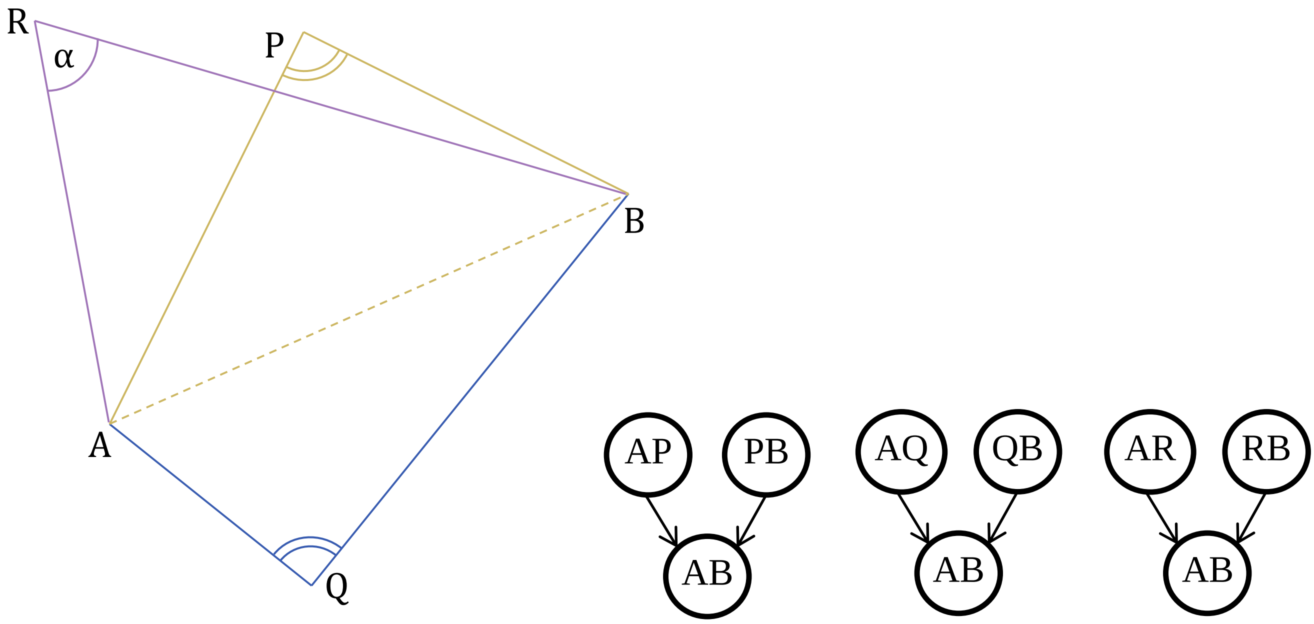



**Abbildung 12:** zu Beispiel 11 und Aufgabe 12 (Skizze maßstäblich)

$$\frac{1}{p_{AB(Q)}} = \left(\frac{AQ}{AB}\right)^2 \frac{1}{p_{AQ}} + \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2 \frac{1}{p_{PQ}}$$

Allen gemessenen Strecken ordnen wir dasselbe Gewicht $p$ zu:

$$\frac{1}{p_{AB(P)}} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{AP}{AB}\right)^2 + \left(\frac{PB}{AB}\right)^2\right] = \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{p_{AB(Q)}} = \frac{1}{p}\left[\left(\frac{AQ}{AB}\right)^2 + \left(\frac{QB}{AB}\right)^2\right] = \frac{1}{p}$$

und schließlich $\underline{p_{AB(P)} = p_{AB(Q)} = p}$. Die beiden Lösungen für AB sind gleichgewichtig.

**Aufgabe 12**: AB aus Beispiel 11 wurde zusätzlich über das Hilfsdreieck ARB mit gemessenen Seiten AR und RB mit derselben Genauigkeit wie AP,PB,AQ,QB und einem als fehlerfrei anzunehmenden Winkel α bestimmt (↗Abbildung 12). Berechnen Sie auch hierfür ein Gewicht $p_{AB(R)}$. Nehmen Sie in Beispiel 11 $p = 1$ an und greifen Sie die benötigten Maße aus der Abbildung 12 ab. Der Maßstab spielt keine Rolle.

**Aufgabe 13**: Der Radius des Kreisbogens in Abbildung 13 soll zweimal bestimmt werden: über die Sehne und Pfeilhöhe ABCP und über die Sehne und Pfeilhöhe DEFQ. Alle vier Sehnenabschnitte AB,BC,DE,EF wurden mit gleicher Genauigkeit bestimmt, die Genauigkeit der Pfeilhöhen BP,EQ ist höher, und zwar verhalten sich die Standardabweichungen der Sehnenabschnitte und Pfeilhöhen wie 5:1. Bestimmen Sie Gewichte für die beiden Radien.

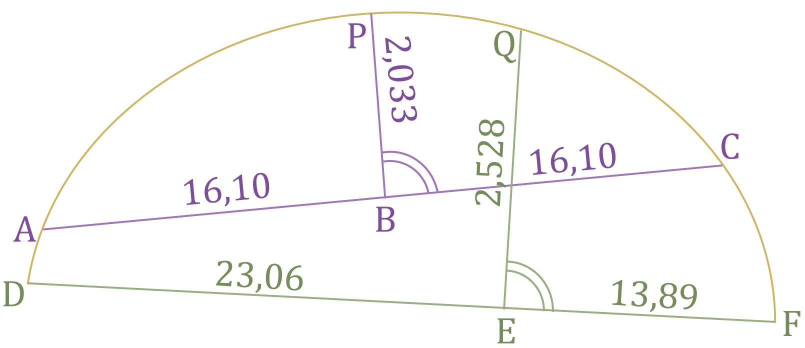



**Abbildung 13:** zu Aufgabe 13, Werte in Meter (Skizze nicht maßstäblich)

Manchmal wird die Gewichtsfortpflanzung so berechnet, dass ein fingierter Wert $\sigma_0$ angenommen wird. Mit diesem werden Standardabweichungen für die Messwerte erhalten und das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet. Am Ende werden aus den erhaltenen Standardabweichungen wieder Gewichte gebildet. Dadurch wird das Gewichtsfortpflanzungsgesetz überflüssig. Allerdings besteht die Gefahr, dass die fingierten Standardabweichungen doch irrtümlich als reale Werte angesehen werden.

**Aufgabe 13** (zweite Variante): Nehmen Sie für alle vier Sehnenabschnitte AB,BC,DE,EF die fingierte Standardabweichung 0,05 m an, woraus sich für die beiden Pfeilhöhen BP,EQ die Standardabweichung 0,01 m ergibt. Führen Sie nun die Fehlerfortpflanzung durch und gehen Sie schließlich wieder zu Gewichten über. Vergleichen Sie mit der ersten Variante.

# 5 LÖSUNGEN

*Zwischenergebnisse wurden sinnvoll gerundet, so können unbedeutende Abweichungen zur exakten Lösung entstehen.*

**Aufgabe 2**: 0,13 $m^2$

**Aufgabe 3**: 0,28 $m^2$

**Aufgabe 4**: $\sigma_{x_N} = 4{,}07\text{mm}$, $\sigma_{y_N} = 2{,}16\text{mm}$

**Aufgabe 5**: $\sigma_S$ = 3,4 mm

**Aufgabe 6**: 28 mm

**Aufgabe 7:** Ein Vollsatz ist gerade nicht ausreichend, also sind zwei Vollsätze zu messen. (Man erkennt: Die Standardabweichung der Distanzmessung spielt bei diesem gestreckten Winkel praktisch keine Rolle.)

**Aufgabe 8:** Am günstigsten ist das Messen der Diagonale und der kürzeren Seite. Das gilt übrigens für alle Flächenbestimmungen derartiger Rechtecke.

**Aufgabe 10**: $\sigma'_N$=17,8 mm mit c' = 500 m

**Aufgabe 11**: a) $\sigma_{x_N} = 11{,}4$ mm, $\sigma_{y_N} = 12{,}2$ mm, $\sigma_N = 16{,}7$ mm; b) $\sigma_{x_N} = 12{,}0$ mm, $\sigma_{y_N} = 11{,}4$ mm, $\sigma_N = 16{,}6$ mm; c) $\sigma_{x_N} = 11{,}2$ mm, $\sigma_{y_N} = 9{,}1$ mm, $\sigma_N = 14{,}5$ mm. Beachten Sie: Die Genauigkeit steigt durch die Mittelbildung fast gar nicht, weil sich die Koordinatenabweichungen nicht "herausmitteln".

**Aufgabe 12**: α=70 gon. $p_{AB(R)} = 1{,}58$

**Aufgabe 13**: r=64,77. Die Gewichte verhalten sich wie 1:1,33, wobei die Bestimmung über DEFQ das höhere Gewicht hat. Zweite Variante: Fingierte Werte sind $\sigma_{rABCP} = 0{,}416$ m und $\sigma_{rDEFQ} = 0{,}360$ m, woraus dieselben Gewichte folgen, wie in der ersten Variante.

Ich danke allen Studierenden der HTW Dresden, die mir halfen, Fehler in diesem Manuskript zu beseitigen. R. Lehmann